2006《信号检测与估计》复习题

参数估计部分：

1. 如果观测到数据 $x[n]=A+w[n], n=0,1,\cdots,N-1$，其中噪声数据 $\mathbf{w}=[w[0],w[1],\cdots,w[N-1]]^T \sim N(\mathbf{0},\mathbf{C})$，求 A 的 CRLB。有效估计量存在吗？如果存在请求出它的方差。

2.考虑 WGN 中已知频率的正弦信号，即 $x[n]=A\cos 2\pi f_0 n+w[n], n=0,1,\cdots,N-1$

其中 w[n]是具有方差 σ^2 的 WGN。求下列参数的 MVU 估计量（可以假定充分统计量是完备的）：

a. 幅度 A,假定 σ^2 已知；

b. 幅度 A 和噪声方差 σ^2；

3.观测数据样本 $\{x[0],x[1],\cdots,x[N-1]\}$ 是 IID 的，服从如下分布：

(1) 拉普拉斯

$$p(x[n];\mu)=\frac{1}{2}\exp[-|x[n]-\mu|]$$

(2) 高斯

$$p(x[n],\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{1}{2}(x[n]-\mu)^2\right)$$

求两种情况下均值 μ 的 BLUE。解释一下 μ 的 MVU 估计。

4. 某种电子器件有效工作时间 t 的分布为

$$f(t)=\begin{cases}\beta e^{-\beta t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

若采集了 N 次实验数据，同一类型电子器件在同样工作条件下所得有效工作时间分别为 $T_1,T_2,\cdots,T_N$，求 β 的最大似然估计。

5.从 PDF $N(A,\sigma^2)$ 观测到 N 个 IID 样本，其中 A,σ^2 皆未知，求 $SNR \quad \eta=A^2/\sigma^2$ 的 MLE。

6.对于信号模型

$$s[n]=\begin{cases}A & 0\le n\le M-1\\ -A & M\le n\le N-1\end{cases}$$

求 A 的 LSE 以及最小 LS 误差。假定观测为 $x[n]=s[n]+w[n], n=0,1,\cdots,N-1$，如果 $w[n]$ 是方差为 σ^2 的 WGN，求 LSE 的 PDF。

7.如果 N 个 IID 观测 $\{x[0],x[1],\cdots,x[N-1]\}$ 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，求 $\theta=[\mu,\sigma^2]^T$ 的矩方法估计量。

8.如果观测到数据 $x[n]=Ar^n+w[n], n=0,1,\cdots,N-1$，其中 r 是已知的，$w[n]$ 是方差为 σ^2 的 WGN，$A\sim N(0,\sigma_A^2)$ 和 $w[n]$ 独立，求 A 的 MMSE 估计量以及最小贝叶斯 MSE。

9. 如果观测数据 $x[n](n=0,1,\cdots,N-1)$ 具有 PDF

$$p(x[n]\,|\,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x[n]-\mu)^2\right]$$

在 μ 给定的条件下，$x[n]$ 是相互独立的。均值 μ 具有先验 PDF $\mu\sim N(\mu_0,\sigma_0^2)$，求 μ 的 MMSE 和 MAP 估计量。另外，当 $\sigma_0^2\to 0$ 和 $\sigma_0^2\to\infty$ 时将发生什么情况。

波形估计部分：

10.设 $s(t)$ 是均值为零的平稳随机信号，根据当前值 $s(t)$ 进行线性预测，求 $s(t+\alpha)(\alpha>0)$ 的估计 $\hat{s}(t+\alpha)$，要求均方误差最小。

11.分别从<u>波形的线性贝叶斯估计</u>和<u>正交原理与线性滤波</u>两种角度推导Wiener滤波器。

信号检测部分：

12. 试从时域和频域两个角度分别解释匹配滤波器。

13. 考虑一个 WGN 中的信号 $s[n]=A\cos 2\pi f_0 n(0<f_0<1/2)$ 的检测问题，其中 $n=0,1,\cdots,N-1$，求 $n=N-1$ 时刻匹配滤波器的信号输出。如果信号被延迟了 n_0

（$n_0 > 0$）个采样时刻，以至于我们收到的信号为$s[n-n_0]$。应用原信号的同一个匹配滤波器，求在$n = N-1$时刻的输出信号与n_0的函数关系。

14. 二元数字通信系统中，假设H_1时信源输出电压为 1，再假设H_0时信源输出为 0。信号在传输信道上叠加了均值为零，方差为$\sigma_n^2 = 1$的高斯噪声。试构造一个虚警率为 0.1 的 NP 接收机，并求出相应的检测概率。（已知$Q(1.29) = 0.1$，$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt$）。

15. 设四元数字通信系统中，信源有四个可能的输出，即假设为H_0时输出 1，假设为H_1时输出 2，假设为H_2时输出 3，假设为H_3时输出 4。各个假设的先验概率$P(H_j)$相等。信号在传输和接收过程中叠加有均值为零，方差为σ_n^2的加性高斯噪声n_k。假定各种判决的代价因子为$C_{ij} = \begin{cases} 1, i \neq j \\ 0, i = j \end{cases}$，$i, j = 0,1,2,3$。现进行了$N$次独立观测，试设计一个四元信号的最佳检测系统。

16.数字通信系统中，两假设下的接收信号分别为

$$\begin{aligned} &H_0 : z_k = A + n_k \qquad k = 0,1,\cdots,N-1 \\ &H_1 : z_k = n_k \qquad\quad\;\; k = 0,1,\cdots,N-1 \end{aligned}$$

若N个样本z_k相互统计独立，噪声$n_k \sim N(0,\sigma_n^2)$，先验概率$P(H_1) = P(H_0) = 1/2$，代价因子$C_{00} = C_{11} = 0$，$C_{01} = C_{10} = 1$。

（1）求最小错误概率的判决规则；

（2）求最小错误概率P_e；

（3）研究观测次数N对检测性能的影响。

17. 如果把信号看作为零均值的白色 WSS 高斯随机过程，方差为σ_s^2，噪声是方差为σ^2的 WGN,且与信号独立，试设计似然比检测器区分如下的两种假设：

$$\begin{aligned} &H_0 : x[n] = w[n] \qquad\qquad n = 0,1,\cdots,N-1 \\ &H_1 : x[n] = s[n] + w[n] \quad n = 0,1,\cdots,N-1 \end{aligned}$$

18.对于检测问题，

$$H_0: x[n] = w[n] \qquad n = 0,1,\cdots,N-1$$
$$H_1: x[n] = As[n] + w[n] \qquad n = 0,1,\cdots,N-1$$

其中 $s[n]$ 是已知的，A 是未知的且 $A>0$，$w[n]$ 是具有方差 σ^2 的 WGN,证明 UMP 检测存在，并求检测性能。

19. 我们希望检测股票市场数据的趋势，为此我们假定数据可以看作为

$$x[n] = A + Bn + w[n] \qquad n = 0,1,\cdots,N-1$$

其中 w[n]是方差为 σ^2 的 WGN，平均股票价格 A 是未知的，但是我们对此没有兴趣。更为重要的是我们希望检验 B=0 还是 B≠0,也就是趋势是否存在。求这个问题的 GLRT。如果 $w[n]=0$，$T(\mathbf{x})$ 是什么？

20. 简述 σ^2 已知和 σ^2 未知情况下经典线性模型的 GLRT，并指出结论是否适用于贝叶斯线性模型。

注：
BLUE:最佳线性无偏估计
CRLB: Cramer-Rao 下限
GLRT：广义似然比检验
IID:独立同分布
LSE:最小二乘估计
MAP：最大后验概率
MLE:最大似然估计
MMSE:最小均方误差估计
MVU:最小方差无偏
UMP:一致最大势
WGN：白色高斯噪声
WSS:广义平稳