检测器总结

杨文　　　电子信息学院
教学实验大楼十楼1008室
E-mail: yw@eis.whu.edu.cn

11.1引言

- 对于一个特定的领域，要选择一个好的检测器取决于许多因素，首先关心的是最佳准则的选择以及描述数据的统计特性。
- 最佳准则通常取决于问题的目标，但是可以由一些实际的因素加以修正；类似地，数据模型要描述实际的数据特征是相当复杂的。
- 掌握各种检测方法的一些知识以及应用条件是十分关键的。

11.2 检测方法

检测方法

简单二元假设检验(无未知参数)

希望根据观测$\{x[0], x[1], \cdots, x[n-1]\}$在假设$\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1$之间进行判决。

1. Neyman-Pearson (NP)

a. 数据模型/假设

$PDF\, p(\mathrm{x}; H_0), p(\mathrm{x}; H_1)$假定是已知的。

b.检测器

$$\text{如果}\mathrm{L}(\mathrm{x}) = \frac{p(\mathrm{x}; H_1)}{p(\mathrm{x}; H_0)} > \gamma, \text{则判} H_1,$$

其中门限γ由约束条件求出，约束条件是虚警概率P_{FA}

应该满足：$P_{FA} = \Pr\{L(\mathrm{x}) > \gamma; H_0\} = \alpha$

简单二元假设检验(无未知参数)

希望根据观测$\{x[0], x[1], \cdots, x[n-1]\}$在假设$H_0$, H_1之间进行判决。

1. Neyman-Pearson (NP)

c.最佳准则

对于给定的$P_{FA}=\alpha$，使检测概率$P_D = \Pr\{L(\mathrm{x})>\gamma; H_1\}$最大。

d.性能

没有一般的结果。

e.说明

检验统计量L(x)称为似然比，检测器称为似然比检验。

简单二元假设检验(无未知参数)

2. 最小错误概率

a. 数据模型/假设

把假设看作为已知先验概率$p(H_0), p(H_1)$的随机事件。另外条件$p(\mathrm{x}\,|\,H_0), p(\mathrm{x}\,|\,H_1)$假定是已知的。

b.检测器

$$\text{如果}\mathrm{L}(\mathrm{x})=\frac{p(\mathrm{x}\,|\,H_1)}{p(\mathrm{x}\,|\,H_0)}>\frac{p(H_0)}{p(H_1)}=\gamma,$$

或等价于$p(H_1\,|\,\mathrm{x})>p(H_0\,|\,\mathrm{x})$ （11.1），则判H_1.

简单二元假设检验(无未知参数)

2. 最小错误概率

c.最佳准则

使错误概率最小，或者使

$$P_e = \Pr\{L(\mathrm{x}) > \gamma \mid H_0\} P(H_0) + \Pr\{L(\mathrm{x}) < \gamma \mid H_1\} P(H_1)$$ 最小。

d.性能

没有一般的结果。

e.说明

(11.1)式的判决准则称为最大后验概率(MAP)准则。如果 $P(H_0) = P(H_1) = 1/2$, 那么如果 $p(\mathrm{x} \mid H_1) > p(\mathrm{x} \mid H_0)$, 则判 H_1。这样的判决称为条件最大似然(ML)准则

简单二元假设检验(无未知参数)

3. 贝叶斯风险

a. 数据模型/假设

假设看作为已知先验概率$p(H_0), p(H_1)$的随机事件。条件PDF$p(\mathrm{x}|H_0), p(\mathrm{x}|H_1)$假定是已知的。最后，给每一个错误赋予一定的代价，其中C_{ij}是当H_j为真时判H_i的代价

*b.*检测器

$$\text{如果}\ \frac{p(\mathrm{x}|H_1)}{p(\mathrm{x}|H_0)} > \frac{(C_{10}-C_{00})p(H_0)}{(C_{01}-C_{11})p(H_1)} = \gamma,$$

则判H_1,其中$C_{10} > C_{00}, C_{01} > C_{11}$

简单二元假设检验(无未知参数)

c.最佳准则

使贝叶斯风险或期望的平均代价

$$R=\mathrm{E}(C)=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}C_{ij}P(H_i\mid H_j)P(H_j)\text{最小，}P(H_i\mid H_j)\text{是}$$

当H_j为真时判H_i的概率

d.性能

没有一般的结果。

e.说明

如果$C_{00}=C_{11}=0, C_{01}=C_{10}=1$，那么$R=P_e$,判决准则就变为(11.1)式的$MAP$准则。

简单多元假设检验(无未知参数)

希望在假设$H_0, H_1, \cdots, H_{M-1}$之间进行判决

4. 最小错误概率

a. 数据模型/假设

假设看作为已知先验概率$p(H_0), p(H_1), \cdots, p(H_{M-1})$的随机事件。另外条件PDF$p(x|H_0), p(x|H_1), \cdots, p(x|H_{M-1})$假定是已知的。

*b.*检测器

判使$P(H_i|x)$最大的假设成立，或者如果

$$P(H_k|x) > P(H_i|x), i \neq k \qquad (11.2)$$

或等价于如果$\ln p(x|H_k) + \ln P(H_k)$最大，则判$H_k$。

简单多元假设检验(无未知参数)

希望在假设$H_0, H_1, \cdots, H_{M-1}$之间进行判决

4. 最小错误概率

c.最佳准则

使错误概率最小，或者使$P_e = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1} P(H_i \mid H_j)P(H_j)$最小

d.性能

没有一般的结果。

e.说明

(11.2)式的判决准则称为MAP准则。如果先验概率相等，即$p(H_i) = 1/M$，那么准则就变为$P(x \mid H_k) > P(x \mid H_i), i \neq k$　　(11.3)，则判H_k，称为条件ML准则。

简单多元假设检验(无未知参数)

5. 贝叶斯风险

a. 数据模型/假设

　　假设看作为已知先验概率$p(H_0), p(H_1), \cdots$， $p(H_{M-1})$的随机事件，条件PDF$p(\mathrm{x} \mid H_0), p(\mathrm{x} \mid H_1), \cdots$， $p(\mathrm{x} \mid H_{M-1})$假定是已知的。最后，给每一个错误赋予一定的代价，其中C_{ij}是当H_j为真时判H_i的代价

*b.*检测器

如果$C_k(\mathrm{x}) > C_i(\mathrm{x}), i \neq k$,则判$H_k$,其中$C_i(\mathrm{x}) = \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P(H_j \mid \mathrm{x})$

简单多元假设检验(无未知参数)

5. 贝叶斯风险

c.最佳准则

使贝叶斯风险或期望的平均代价

$$R = \mathrm{E}(\mathrm{C}) = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P(H_i \mid H_j) P(H_j) \text{最小.}$$

d.性能

没有一般的结果。

e.说明

如果$C_{ii}=0(i=0,1,\cdots,M-1)$并且$C_{ij}=1(i\neq j)$，那么$R=P_e$，判决准则就变为(11.2)式的$MAP$准则。

复合二元假设检验（存在未知参数）

6.广义似然比检验(GLRT)

a. 数据模型/假设

在H_0和H_1条件下的PDF含有未知参数分别用θ_0和θ_1表示。PDF用$p(x;\theta_0,H_0)$和$p(x;\theta_1,H_1)$给出,并且除θ_0和θ_1外假定都是已知的。

b. 检测器

如果 $$L_G(x)=\frac{p(x;\hat{\theta}_1,H_1)}{p(x;\hat{\theta}_0,H_0)}>\gamma$$

则判H_1,其中$\hat{\theta}_i$是最大似然估计(MLE),或者$\hat{\theta}_i$是使$p(x;\theta_i,H_i)$最大的值。

复合二元假设检验（存在未知参数）

6.广义似然比检验(GLRT)

c. 最佳准则：　无。

d. 性能：　没有一般的结果。

e. 说明

一个等效的形式使如果

$$L_G(\mathrm{x}) = \frac{p(\mathrm{x};\hat{\theta}_1, H_1)}{p(\mathrm{x};\hat{\theta}_0, H_0)} > \gamma$$

则判H_1, $L_G(\mathrm{x})$称为广义似然比。

复合二元假设检验（存在未知参数）

7. 贝叶斯

a. 数据模型/假设

未知参数矢量θ_0和θ_1看作作为具有已知先验PDF$p(\theta_0)$和$p(\theta_1)$的随机矢量。条件PDF$p(\mathrm{x}|\theta_0,H_0)$假定使已知的。

b. 检测器

如果 $L(x)=\frac{p(\mathrm{x};H_1)}{p(\mathrm{x};H_0)}=\frac{\int p(\mathrm{x}|\theta_1;H_1)p(\theta_1)d\theta_1}{\int p(\mathrm{x}|\theta_0;H_1)p\theta_0)d\theta_0}>\gamma$ ， 则判H_1。

复合二元假设检验（存在未知参数）

7. 贝叶斯

c.最佳准则

由于未知参数通过积分而消除，所以最佳准则与Neyman-Pearson相同（第1条）。

d. 性能：　没有一般的结果。

e.说明：　γ的确定请参见Neyman-Pearson准则。积分可能难以求出，这依赖于先验PDF的选择。

复合二元假设(存在未知参数，但没有多余参数)

在H_0和H_1条件下的PDF除了未知参数矢量θ的值不同之外是相同的, PDF用$p(x;\theta)$表示，其中θ是$r\times 1$的。假设(或参数)检验是

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

复合二元假设(存在未知参数，但没有多余参数)

8.广义似然比($GLRT$)

a.数据模型/假设

PDF $p(x;\theta)$ 除了在 H_1 条件下的 θ 之外假定是已知的。

b. 检测器

如果 $L_G(x)=\dfrac{p(x;\hat{\theta}_1)}{p(x;\hat{\theta}_0)}>\gamma$，则判 H_1，

其中 $\hat{\theta}_1$ 是在 H_1 条件下 θ 的 MLE(使 $p(x;\theta)$ 最大)，

c.最佳准则：无。

复合二元假设(存在未知参数，但没有多余参数)

8.广义似然比($GLRT$)

d.性能：渐近统计特性($N \to \infty$)由下式给出，

$$2\ln L_G(x) \overset{a}{\sim} \begin{cases} \chi_r^2 & \text{在} H_0 \text{条件下} \\ \chi_r'^2(\lambda) & \text{在} H_1 \text{条件下} \end{cases}$$

其中$\lambda = (\theta_1 - \theta_0)^T \mathrm{I}(\theta_0)(\theta_1 - \theta_0)$，$\mathrm{I}(\theta_0)$表示$r \times r$的Fisher信息矩阵，$\theta_1$是在$H_1$条件下的真实值。

e. 说明：要求H_1条件下的MLE。

符合二元假设(存在未知参数，但没有多余参数)

9.*Wald*检验

a.数据模型/假设

与*GLRT*相同(参见8*a*项)

b.检测器

$$\text{如果}T_W(x) = (\hat{\theta}_1 - \theta_0)^T I(\hat{\theta}_1)(\hat{\theta}_1 - \theta_0) > \gamma,\text{则判}H_1\text{。}$$

c.最佳准则：无。

d.性能：与*GLRT*相同(参见8*d*项)。

e.说明： 要求H_1条件下的*MLE*。

符合二元假设(存在未知参数，但没有多余参数)

10.*Rao*检验

a.数据模型/假设： 与*GLRT*相同。

b.检测器

如果

$$T_R(x)=\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\theta_0}^{T} I^{-1}(\theta_0)\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\theta_0}>\gamma$$

则判H_1。

c.最佳准则： 无。

d.性能： 与*GLRT*相同(参见8*d*项)。

e.说明： 不要求MLE。

复合二元参数检验(存在未知参数和多余参数)

在H_0和H_1条件下的PDF除了未知参数矢量θ的值不同之外是相同的。参数矢量为$\theta=[\theta_r^{\mathrm{T}}\theta_s^T]^{\mathrm{T}}$，其中$\theta_r$是$r\times 1$的，$\theta_s$(多余参数矢量)是$s\times 1$的，PDF用$p(x;\theta_r,\theta_s)$表示。

假设检验是

$$\mathrm{H}_0:\theta=\theta_{r_0},\theta_s$$

$$\mathrm{H}_1:\theta\neq\theta_{r_0},\theta_s$$

多余参数矢量θ_s在H_0和H_1条件下是未知的。

复合二元参数检验(存在未知参数和多余参数)

11. 广义似然比(GLRT)

a. 数据模型/假设

假定PDF$p(x;\theta_r,\theta_s)$除了在H_0条件下的θ_s以及H_1条件下的θ_r和θ_s之外是已知的。

b. 检测器

如果$L_G(x)=\frac{p(x;\hat{\theta}_{r_1},\hat{\theta}_{s_1})}{p(x;\hat{\theta}_{r_0},\hat{\theta}_{s_0})}>\gamma$，则判$H_1$，其中$\hat{\theta}_{r_1}$、$\hat{\theta}_{s_1}$是在$H_1$条件下的$MLE$(或者无约束$MLE$，它是在$\theta_r$、$\theta_s$上使$p(x;\theta_r,\theta_s)$)，而$\theta_{s_0}$是在$H_0$条件下的$MLE$(或者为带约束的$MLE$，它是在$\theta_s$上使$p(x;\theta_{r_0},\theta_s)$最大而求得的)。

c. 最佳准则：无。

复合二元参数检验(存在未知参数和多余参数)

11. 广义似然比(GLRT)

d. 性能： 渐近统计特性($N\to\infty$)由下式给出，

$$2\ln L_G(x) \overset{a}{\sim} \begin{cases} \chi_r^2 & \text{在}H_0\text{条件下} \\ \chi_r'^2(\lambda) & \text{在}H_1\text{条件下} \end{cases}$$

其中 $\lambda=(\theta_{r_1}-\theta_{r_0})^T[I_{\theta_r\theta_r}(\theta_{r_0},\theta_s)-I_{\theta_r\theta_s}(\theta_{r_0},\theta_s)I^{-1}_{\theta_r\theta_s}(\theta_{r_0},\theta_s)I_{\theta_s\theta_r}(\theta_{r_0},\theta_s)](\theta_{r_1}-\theta_{r_0})$,

θ_{r_1}是在H_0条件下θ_r的真实值，θ_s是真实值，它在两种假设下是相同的。

Fisher信息矩阵可以分块为

$$I(\theta)=I(\theta_r,\ \theta_s)=\begin{bmatrix} I_{\theta_r\theta_r}(\theta_r,\theta_s) & I_{\theta_r\theta_s}(\theta_r,\theta_s) \\ I_{\theta_s\theta_r}(\theta_r,\theta_s) & I_{\theta_s\theta_s}(\theta_r,\theta_s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r\times r & r\times s \\ s\times r & s\times s \end{bmatrix}$$

e.说明：要求H_0和H_1条件下的*MLE*。

复合二元参数检验(存在未知参数和多余参数)

12. Wald检验

a. 数据模型/假设:与GLRT相同(参见11a项)。

b. 检测器

如果$\mathrm{T_W}(\mathrm{x}) = (\hat{\theta}_{r_1} - \theta_{r_0})^T \left(\left[\mathrm{I}^{-1}(\hat{\theta}_1) \right]_{\theta_r\theta_r} \right)^{-1} (\hat{\theta}_{r_1} - \theta_{r_0}) > \gamma$,则判$H_1$。

其中$\hat{\theta}_1 = [\hat{\theta}_{r_1}^T \hat{\theta}_{s_1}^T]^T$是$MLE$条件下的$MLE$,且

$$[\mathrm{I}^{-1}(\theta)]_{\theta_r\theta_r} = (\mathrm{I}_{\theta_r\theta_r}(\theta) - \mathrm{I}_{\theta_r\theta_s}(\theta)\mathrm{I}_{\theta_s\theta_s}^{-1}(\theta)\mathrm{I}_{\theta_s\theta_r}(\theta))^{-1}$$

c.最佳准则:无。

d. 性能:与GLRT相同(参见11d项)。

e. 说明:要求H_1条件下的MLE。

复合二元参数检验(存在未知参数和多余参数)

13.*Rao*检验

a.数据模型/假设:与GLRT相同(参见11a页)。

b. 检测器

如果

$$T_R(x)=\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta_r}\Big|^T_{\theta=\tilde{\theta}}[I^{-1}(\tilde{\theta})]\theta_r\theta_r\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta_r}\Big|_{\theta=\tilde{\theta}}>\gamma$$

则判H_1。其中$\tilde{\theta}=[\theta_{r_0}^T\hat{\theta}_{s_0}^T]^T$是$H_0$条件下的*MLE*(带约束的*MLE*,它是在$\theta_s$上使$p(x;\theta_{r_0},\theta_s$最大而求得的)。

c.最佳准则:无。

d.性能:与*GRLT*相同(参见11*d*项)。

e.说明:只要求H_0条件下的*MLE*。

复合二元单边参数检验(存在标量未知参数,没有多余参数)

这个检验用于单边假设检验,它的PDF在H_0和H_1条件下是相同的,但是存在不同的标量参数,PDF用p(X;θ)表示。

假设检验为

$$H_0: \theta = \theta_0$$
$$H_1: \theta > \theta_0$$

复合二元单边参数检验(存在标量未知参数,没有多余参数)

14.局部最大势(LMP)检验

a. 数据模型/假设：假定PDFp(x;θ)除了在H_1条件下的θ值之外是已知的。

b.检测器

如果$T_{LMP}(x)=\dfrac{\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\theta_0}}{\sqrt{I(\theta_0)}}>\gamma$，则判$H_1$。其中$I(\theta)$是$Fisher$信息，门限$\gamma$由$Q^{-1}(P_{FA})$给出(当$N\to\infty$时)。

c.最佳准则

如果$\theta_1-\theta_0$是小的整数,其中θ_1是H_1条件下θ的值,那么对于给定的P_{FA}使检测概率P_D最大。

复合二元单边参数检验(存在标量未知参数，没有多余参数)

14.局部最大势(LMP)检验

d.性能：渐近统计特性(当$N\to\infty$时)由下式给出，

$$T_{LMP}(X)\overset{a}{\sim}\begin{cases}N(0,1) & \text{在H}_0\text{条件下}\\ N(\sqrt{I(\theta_0)}(\theta_1-\theta_0),1) & \text{在H}_1\text{条件下}\end{cases}$$

其中θ_1是H_1条件下的θ的值。

e.说明：可以看作为对标量θ的Rao检验的单边等效形式。

复合多元假设检验

我们希望在假设$H_0, H_1, \ldots, H_{M-1}$之间进行判决。

15.广义最大似然准则

a.数据模型/假设

数据的PDF$\mathrm{p}(\mathrm{x}; \theta_\mathrm{i} | \mathrm{H}_\mathrm{i})$除了参数矢量$\theta_\mathrm{i}$之外是已知的,参数矢量的维数可能随假设变化。

b. 检测器

如果 $\xi_i = \ln p(\mathrm{x}; \hat{\theta}_i | H_i) - \frac{1}{2} \ln \det(\mathrm{I}(\hat{\theta}_i))$，对于$i = k$是最大的,那么广义$ML$准则判$H_i$。其中$\hat{\theta}_i$是假定$H_i$为真时的$\theta$的$MLE$(使$p(\mathrm{x}; \theta | H_i)$最大),并且$\mathrm{I}(\theta)$是假定$H_i$为真时的$Fisher$信息矩阵。

复合多元假设检验

我们希望在假设$H_0, H_1, \ldots, H_{M-1}$之间进行判决。

15.广义最大似然准则

c.最佳准则：无。

d. 性能：没有一般的结果。

e. 说明

这种方法是贝叶斯和经典方法的混合。ξ_i的第一项是估计的数据似然函数,而第二项是估计未知参数的罚因子。

11.3线性模型

线性模型

当线性模型可以用来描述H_i条件下的数据时,可以得到显式检测器和它们的性能。线性模型可能是贝叶斯的,也可能是经典的,我们分开进行描述。然后,我们将总结一种扩展的形式,称为非高斯线性模型。

经典线性模型

对于经典的线性模型，在H_1条件下的数据由下式给出，

$$\mathrm{x} = H\theta + W$$

其中x是$N\times 1$观测矢量，H是已知的$N\times P$的观测矩阵，$N > P$，它的秩为p，θ是$\mathrm{p}\times 1$的矢量或参数（可能已知，也可能未知），W是$\mathrm{N}\times 1$的噪矢量，PDF为$\mathrm{N}(0, \mathrm{C})$，x的PDF是

$$\mathrm{p}(\mathrm{x};\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\det^{\frac{1}{2}}(C)}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathrm{x}-\mathrm{H}\theta)^T \mathrm{C}^{-1}(\mathrm{x}-\mathrm{H}\theta)\right]$$

经典线性模型

16.已知确定信号

a.假设检验

$$\begin{cases} H_0 : \mathrm{x} = \mathrm{w} \\ H_1 : \mathrm{x} = \mathrm{H}\theta_1 + \mathrm{w} \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} H_0 : \theta = 0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

其中θ_1是H_1条件下θ的已知值。

经典线性模型

16.已知确定信号

b. 检测器

如果

$$T(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^T \mathrm{C}^{-1} s > \gamma'$$

则判H_1,其中$s = H\theta_1, \gamma' = \sqrt{s^T \mathrm{C}^{-1} s} Q^{-1}(P_{FA})$。

c.最佳准则：给定P_{FA}使P_D最大$(Neyman - Pearson)$。

d.性能：　$P_D = Q(Q^{-1}(P_{FA}) - \sqrt{s^T \mathrm{C}^{-1} s})$

e.说明：这是广义匹配滤波器的一种特殊情况，或者是广义的仿形–相关器。

经典线性模型

17. 具有未知参数的确定性信号

a. 假设检验

$$\begin{cases} H_0 : \mathrm{x} = \mathrm{w} \\ H_1 : \mathrm{x} = \mathrm{H}\theta + \mathrm{w} \end{cases} \quad 或者 \quad \begin{cases} H_0 : \theta = 0 \\ H_1 : \theta \neq 0 \end{cases}$$

其中θ在H_1条件下是未知的，$C=\sigma^2 I$

*b.*检测器

如果 $T(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x}^T H \hat{\theta}_1}{\sigma^2} = \frac{\mathrm{x}^T \hat{s}}{\sigma^2} > \gamma'$,则判$H_1$,其中$\hat{\theta}_1 = (H^T H)^{-1} H^T \mathrm{x}$

是在H_1条件下θ的*MLE*,$\hat{s} = H\hat{\theta}_1$是信号的*MLE*，$\gamma' = Q_{\chi_p^2}^{-1}(P_{FA})$。

经典线性模型

17. 具有未知参数的确定性信号

c.最佳准则：由于是$GLRT$检测器，没有最佳准则。

d.性能：$P_D = Q_{\chi_p'^2(\lambda)}(\gamma')$，　　$P_{FA} = Q_{\chi_p^2}(\gamma')$

其中$\lambda = \dfrac{\theta_1^T H^T H \theta_1}{\sigma^2} = \dfrac{s^T s}{\sigma^2}$，$\theta_1$是$H_1$条件下$\theta$的真实值。

e.说明：这是定理7.1在$A = I$、$b = 0$、$r = p$时的一种特殊情况，它可以扩展到任何C已知的情况。检验统计量具有估计器-相关器的形式。

经典线性模型

18. 具有未知参数的确定性信号和未知噪声方差

a. 假设检验

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \mathrm{x} = \mathrm{w} \\ \mathrm{H}_1 : \mathrm{x} = H\theta + \mathrm{w} \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} \mathrm{H}_0 : \theta = 0, \sigma^2 > 0 \\ \mathrm{H}_1 : \theta \neq 0, \sigma^2 > 0 \end{cases}$$

其中 θ 在 H_1 条件下是未知的，$\mathrm{C}=\sigma^2\mathrm{I}$，在 H_0 和 H_1 条件下噪声的方差 σ^2 未知。

b.检测器

如果 $T(\mathrm{x}) = \frac{1}{p}\frac{\mathrm{x}^T \mathrm{H}\hat{\theta}_1}{\hat{\sigma}_1^2} = \frac{1}{p}\frac{\mathrm{x}^T\hat{\mathrm{s}}}{\hat{\sigma}_1^2} > \gamma'$， 则判 H_1，其 $\hat{\theta}_1 = (H^T H)^{-1} H^T \mathrm{x}$

是在 H_1 条件下 θ 的 MLE，$\hat{\mathrm{s}} = H\hat{\theta}_1$ 是信号的 MLE，

$\hat{\sigma}_1^2 = (\mathrm{x}^T\mathrm{x} - \mathrm{x}^T H\hat{\theta}_1)/(N-p)$ 是 H_1 条件下 σ^2 的最小方差无偏 (MVU) 估计量。门限由 $\gamma' = \mathrm{Q}^{-1}_{\mathrm{F}_p, N-p}(P_{FA})$ 给出。

经典线性模型

18. 具有未知参数的确定性信号和未知噪声方差

c.最佳准则：由于这是$GLRT$检测器,没有最佳准则。

d.性能：$P_{FA}=Q_{F_{p,N-p}}(\gamma')$，$P_D=Q_{F'_{p,N-p}(\lambda)}(\gamma')$

其中$\lambda=\frac{\theta_1^T H^T H\theta_1}{\sigma^2}=\frac{s^T s}{\sigma^2}$，$\theta_1$是$H_1$条件下$\theta$的真是值。

e.说明：这是定理9.1在$A=I$、$b=0$和$r=p$时的一种特殊情况,它可以扩展到$\mathrm{C}=\sigma^2\mathrm{V}$的情况, 其中V是已知的, σ^2是未知的。

一般线性模型-未知噪声参数

对于一般线性模型,在H_1条件下的数据由下式给出,

$$x=H\theta+w$$

其中x是$N\times 1$的观测矢量,H是$N\times p$的观测矩阵,$N>p$,它的秩为p,θ是$p\times 1$的未知参数矢量,w是$N\times 1$的噪声矢量,PDF为$N(0,C(\theta_\omega))$,θ_ω是$q\times 1$的未知噪声参数矢量,x的PDF是

$$p(x;\theta,\theta_\omega)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}\det^{\frac{1}{2}}(C(\theta_w))}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-H\theta)^T C^{-1}(\theta_\omega)(x-H\theta)\right]$$

一般线性模型-未知噪声参数

19.Rao检验

a.假设检验

$$\begin{cases} H_0: \mathrm{x} = \mathrm{w} \\ H_1: \mathrm{x} = H\theta + \mathrm{w} \end{cases} \quad 或者 \begin{cases} H_0: \theta = 0, \theta_\omega \\ H_1: \theta \neq 0, \theta_\omega \end{cases}$$

b.检测器

如果 $T_R(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^T C^{-1}(\hat{\theta}_{\omega_0}) H\hat{\theta}_1 = \mathrm{x}^T C^{-1}(\hat{\theta}_{\omega_0})\hat{s} > \gamma', Rao$ 检测器判H_1,其中$\hat{\theta}_1 = (H^T C^{-1}(\hat{\theta}_{\omega_0})H)^{-1} H^T C^{-1}(\hat{\theta}_{\omega_0})\mathrm{x}$ 是H_1条件下θ的估计量,$\hat{\theta}_{\omega_0}$是H_0条件下θ_ω的MLE,

$\hat{s} = H\hat{\theta}_1$是信号的估计量。门限由

$\gamma' = Q^{-1}_{\chi^2_p}(P_{FA})$给出(当$\mathrm{N} \to \infty$时)。

一般线性模型-未知噪声参数

19.Rao检验

c. 最佳准则：无。

d. 性能：渐近性能（当$N \to \infty$时）为

$$P_{FA} = Q_{\chi_p^2}(\gamma'), \quad P_D = Q_{\chi_p'^2(\lambda)}(\gamma')$$

其中$\lambda = \theta_1^T H^T C^{-1}(\theta_\omega) H \theta_1$，$\theta_1$是$H_1$条件下$\theta$的真实值，$\theta_\omega$是真实值，我们假定它在每种假设下是相同的。

e. 说明：检验统计量具有广义得估计器-相关器的形式

贝叶斯线性模型

对于贝叶斯线性模型,在H_1条件下的数据由下式给出,

$$\mathrm{x} = H\theta + \mathrm{w}$$

其中x是$N \times 1$观测矢量,H是已知的$N \times p$观测矩阵,N>p,

θ是$p \times 1$的随即矢量,$\theta \sim N(0, C_\theta)$, w是$N \times 1$的噪声矢量,

PDF为$N(0, \sigma^2 \mathrm{I})$,且与$\theta$独立。x的$PDF$是

$$p(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\pi^{N/2} \det^{\frac{1}{2}}(\mathrm{C}_\theta + \sigma^2 \mathrm{I})} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\mathrm{x}^T (C_\theta + \sigma^2 \mathrm{I})^{-1} \mathrm{x}\right]$$

贝叶斯线性模型

$20.Neyman-Pearson(NP)$

$a.$假设检验

$$\mathrm{H}_0 : \mathrm{x} = \mathrm{w}$$

$$\mathrm{H}_1 : \mathrm{x} = H\theta + \mathrm{w}$$

$b.$检测器

如果 $T(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^T \hat{s} > \gamma'$，则判$H_1$，

其中$\hat{s} = HC_\theta H^T (HC_\theta H^T + \sigma^2 \mathrm{I})^{-1} \mathrm{x}$是$s = H\theta$的最小均方误差(MMSE)估计量。

$c.$最佳准则：给定P_{FA}使P_D最大(NP)。

d. 性能：参加5.3节

e. 说明：可以扩展到一般得已知噪声协方差矩阵C的情况

非高斯线性模型

对于非高斯线性模型,在H_1条件下的数据由下式给出,

$$x=H\theta+w$$

其中x是N×1观测矢量,H是已知的N×p的观测矩阵,N>p,秩为p,θ是p×1的未知参数矢量,w是具有IID分量的N×1的噪声矢量,$\omega[n]$的PDF为$p(\omega)$,并且假定是已知的。

非高斯线性模型

21. Rao检验

a. 假设检验

$$\begin{cases} H_0: \mathrm{x} = \mathrm{w} \\ H_1: \mathrm{x} = H\theta + \mathrm{w} \end{cases} \quad 或者 \quad \begin{cases} H_0: \theta = 0 \\ H_1: \theta \neq 0 \end{cases}$$

其中θ在H_1条件下是未知的。

b. 检测器

$$如果\mathrm{T_R}(\mathrm{x}) = \frac{y^T H (H^T H)^{-1} H^T y}{i(A)} > \gamma'，\ Rao检验判\mathrm{H}_1,$$

$$其中y = \left[y[0]y[1]...y[N-1]\right]^T, y[n] = g(x[n]),\ \ g(w) = -\frac{d\ln p(w)}{dw}$$

$$i(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\frac{dp(w)}{dw})^2}{p(w)} dw,\ \ 门限由\gamma' = Q_{\chi_p^2}^{-1}(P_{FA})确定(当N \to \infty时)。$$

非高斯线性模型

21. Rao检验

c.最佳准则：无。

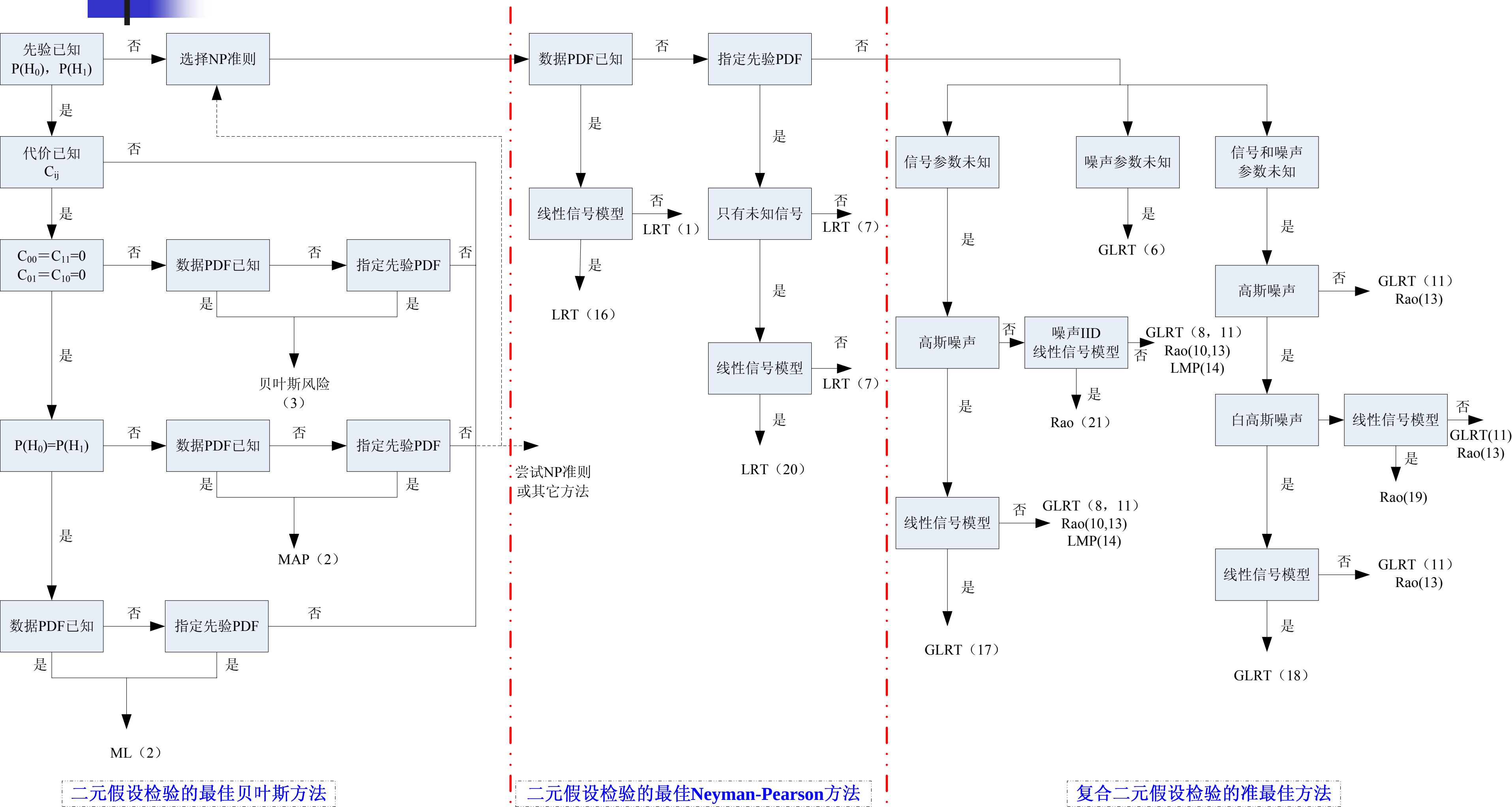
d.性能：渐近性能(当$N \to \infty$时)为

$$P_{FA} = Q_{\chi_p^2}(\gamma')，\quad P_D = Q_{\chi_p'^2(\lambda)}(\gamma')$$

其中$\lambda = i(A)\theta_1^T H^T H \theta_1$，$\theta_1$是$H_1$条件下$\theta$的真实值。

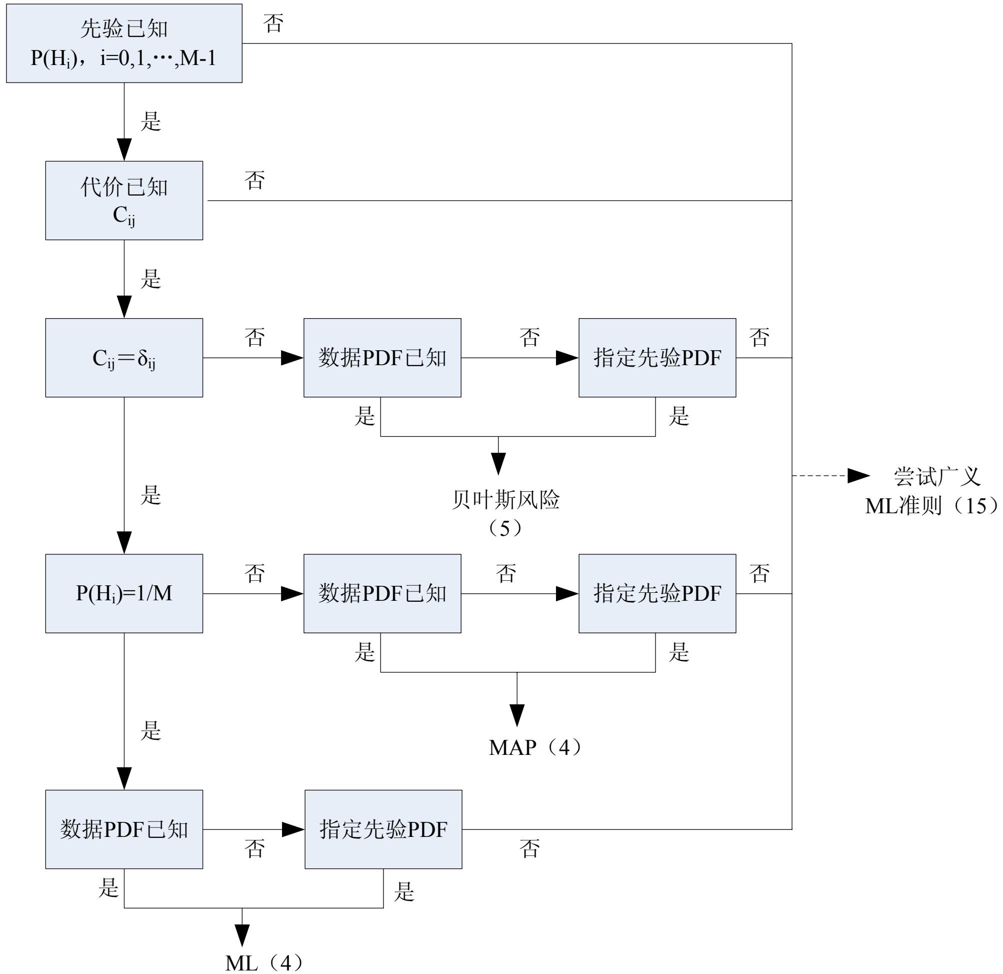
e. 说明：参见10.6节

11.4 选择一个检测器-二元



11.4 选择一个检测器—多元

*贝叶斯风险和MAP/ML规则分别是在贝叶斯风险最小和错误概率最小意义下的最佳。



多元假设检验的最佳贝叶斯方法

期末复习题—信号估计

估计部分(22):

- pp53-55:3.4,3.9
- pp82-84:4.11,4.14
- pp102-105:5.13,5.17
- pp120-124:6.4, 6.15
- pp164-169:7.3,7.10,7.21,7.26
- pp226-230:8.3,8.27
- pp250-252:9.2,9.4
- pp271-274:10.3,10.12
- pp299-303:11.1, 11.16
- pp330-334:12.1,12.2

期末复习题一信号检测

检测部分(18)：

- pp520-522:3.15,3.16,3.21
- pp555-560:4.6,4.15
- pp590-595:5.3,5.9,5.12, 5.23
- pp629-632:6.2,6.10, 6.16,6.19
- pp679-684:7.3,7.9
- pp708-711:8.7
- pp737-741:9.4
- pp769-771:10.8

再见

最佳判决准则

1、贝叶斯准则(Bayes)

$$\frac{f(Y|H_1)}{f(Y|H_0)} \geq \frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{P(H_1)(C_{01}-C_{11})},$$

判 H_1 为真，反之，判 H_0 为真。

2、最小错误概率准则

$$\frac{f(Y|H_1)}{f(Y|H_0)} \geq \frac{P(H_0)}{P(H_1)},$$

判 H_1 为真，反之，判 H_0 为真。

3、Neyman-Pearson 准则

$$\begin{cases} \dfrac{f(Y|H_1)}{f(Y|H_0)} \geq \lambda, \\ P(D_1|H_0) = \alpha = \text{constant} \end{cases}$$

判 H_1 为真，反之，判 H_0 为真。

最佳判决准则

4、最大后验概率准则

$$\frac{f(Y|H_1)}{f(Y|H_0)} \geq \frac{P(H_0)}{P(H_1)},$$

判 H_1 为真，反之，判 H_0 为真。

5、极大极小准则

$$\begin{cases} \dfrac{f(Y|H_1)}{f(Y|H_0)} \geq \dfrac{q_0(C_{10}-C_{00})}{(1-q_0)(C_{01}-C_{11})} \\ C_{00}+(C_{10}-C_{00})\alpha(q_0)=C_{11}+(C_{01}-C_{11})\beta(q_0), \end{cases}$$

判 H_1 为真，反之，判 H_0 为真。

6、最大似然准则

$$\frac{f(Y|H_1)}{f(Y|H_0)} \geq 1$$

判 H_1 为真，反之，判 H_0 为真。