



随机性信号检测

杨文 电子信息学院
教学实验大楼十楼1008室
E-mail: yw@eis.whu.edu.cn

复合假设检验方法

- 复合假设检验的两种主要方法：
 - 把未知参数看作随机变量的一个现实，并给它指定一个先验的**PDF**—贝叶斯方法。
 - 估计未知参数以便用在似然比检验中—广义似然比检验(**GLRT**)。
- 贝叶斯方法要求未知参数的先验知识，而**GLRT**则不需要。在实际中，**GLRT**由于实现起来容易且严格的假定较少，因此其应用也更广泛。而贝叶斯方法则要求多重积分，闭合形式的解通常是不可能的。
- 一般的问题就是当**PDF**依赖于一组未知参数时，在 H_0 和 H_1 之间作出判决。这些参数在每一种假设下可能相同，也可能不同。在 H_0 条件下，假定矢量参数 θ_0 是未知的，而在 H_1 条件下， θ_1 矢量参数是未知的。



贝叶斯方法

贝叶斯方法给 θ_0 和 θ_1 指定 *PDF*, 为此把未知参数看作为矢量随机变量的一个现实。如果先验 *PDF* 分别用 $p(\theta_0)$, $p(\theta_1)$ 表示, 则数据的 *PDF* 为

$$p(x; H_0) = \int p(x | \theta_0; H_0) p(\theta_0) d\theta_0$$

$$p(x; H_1) = \int p(x | \theta_1; H_1) p(\theta_1) d\theta_1$$

其中 $p(x | \theta_i; H_i)$ 是假定 H_i 为真, 在 θ_i 的条件下 x 的条件 *PDF*。非条件 *PDF* $p(x; H_0)$ 和 $p(x; H_1)$ 是完全指定的, 不再依赖于未知参数。利用贝叶斯方法, 如果

$$\frac{p(x; H_1)}{p(x; H_0)} = \frac{\int p(x | \theta_1; H_1) p(\theta_1) d\theta_1}{\int p(x | \theta_0; H_0) p(\theta_0) d\theta_0} > \gamma \quad (6.12), \text{ 则最佳 NP}$$

检测器判 H_1 。要求的积分是多重积分, 维数等于未知参数维数。

贝叶斯方法

- 先验**PDF**的选择是很难证明的，如果确实有某些先验知识，那么应该利用起来；如果没有，就应该使用无信息的先验**PDF**。
- 无信息先验**PDF**是一种尽可能平的先验**PDF**。均匀分布的**PDF**不失为一种好的选择，尽管积分证明是很难的。然而，如果参数在无穷区间取值，那么就不能指定均匀分布的**PDF**。通常选择高斯**PDF**，即 $A \sim N(0, \sigma_A^2)$ 并且令 $\sigma_A^2 \rightarrow \infty$ 来反映我们对先验知识的缺乏。

广义似然比检验 (GLRT)

*GLRT*用最大似然估计取代了未知参数。尽管*GLRT*不是最佳，但实际上它的性能很好。一般而言，如果

$$L_G(x) = \frac{p(x; \hat{\theta}_1, H_1)}{p(x; \hat{\theta}_0, H_0)} > \gamma, \text{ 则 } GLRT \text{ 判 } H_1。$$

其中 $\hat{\theta}_1$ 是假定 H_1 为真时 θ_1 的MLE(使 $p(x; \hat{\theta}_1, H_1)$ 最大), $\hat{\theta}_0$ 是假定 H_0 为真时 θ_0 的MLE(使 $p(x; \hat{\theta}_0, H_0)$ 最大)。由于这种方法在求 $L_G(x)$ 的第一步时就是求MLE,所以也提供了有关未知参数的信息。



内容提要

- 已知参数的随机性信号检测
- 未知参数的随机性信号检测

已知参数的随机性信号检测

5.1 引言

- 前面我们能够通过对检测检验统计量均值的变化来检测噪声中出现的信号。这是因为假定信号是确定的。
- 在某些情况下，把信号看成一个随机过程更加合适,它的协方差结构是已知的。
- 本章考察从随机信号模型导出的最佳检测器。



5.3 估计器—相关器

L5.1 能量检测器—把信号看作零均值的白色WSS高斯随机过程，方差为 σ_s^2 ；噪声是与信号独立的方差为 σ^2 的WGN，检测器为

$$H_0 : x[n] = w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$H_1 : x[n] = s[n] + w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

如果似然比超过门限，即 $L(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}; H_1)}{p(\mathbf{x}; H_0)} > \gamma$ ，NP检测器判 H_1 。

由模型假定，在 H_0 条件下， $\mathbf{x} \sim N(0, \sigma^2 I)$ ，

在 H_1 条件下， $\mathbf{x} \sim N(0, (\sigma^2 + \sigma_s^2) I)$

5.3 估计器—相关器

$$L(\mathbf{x}) = \frac{\frac{1}{[2\pi(\sigma_s^2 + \sigma^2)]^{\frac{N}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2(\sigma_s^2 + \sigma^2)} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]\right]}{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]\right]}$$

对数似然比为：

$$l(\mathbf{x}) = \frac{N}{2} \ln\left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_s^2}\right) + \frac{1}{2} \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2 (\sigma^2 + \sigma_s^2)} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

因此，如果 $T(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] > \gamma'$ ，则判 H_1 成立。NP 检测器计算接收数据中的能量，并且把它和门限进行比较，因而也称为能量检测器。



5.3 估计器—相关器

直观理解：如果信号出现，那么接收数据的能量将会增加。实际上等效的检验统计量 $T'(x) = (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n)$ 可以看作方差的估计器。可以认为，在 H_0 条件下方差为 σ^2 ，而在 H_1 条件下方差为 $\sigma^2 + \sigma_s^2$ 。

$$T(x) / \sigma^2 \sim \chi_N^2, H_0 \text{ 条件};$$

$$T(x) / (\sigma^2 + \sigma_s^2) \sim \chi_N^2, H_1 \text{ 条件}$$

5.3 估计器—相关器

确定检测性能，统计量是 N 个IID高斯随机变量平方和。
因此，

$$P_{FA} = \Pr\{T(\mathbf{x}) > \gamma'; H_0\} = \Pr\left\{\frac{T(\mathbf{x})}{\sigma^2} > \frac{\gamma'}{\sigma^2}; H_0\right\} = Q_{\chi_N^2}\left(\frac{\gamma'}{\sigma^2}\right)$$

$$\text{和 } P_D = \Pr\{T(\mathbf{x}) > \gamma'; H_1\} = Q_{\chi_N^2}\left(\frac{\gamma'}{\sigma^2 + \sigma_s^2}\right)$$

门限通过
此式求出

可以看到：检测性能随 SNR 单调递增， SNR 定义为 σ_s^2 / σ^2

5.3 估计器—相关器

单调递减函数

$$P_D = Q_{\chi_N^2} \left(\frac{\gamma' / \sigma^2}{\sigma_s^2 / \sigma^2 + 1} \right) = Q_{\chi_N^2} \left(\frac{\gamma''}{\sigma_s^2 / \sigma^2 + 1} \right)$$

随着 σ_s^2 / σ^2 的增加, $Q_{\chi_N^2}$ 函数的自变量减少, 这样 P_D 增加。

图5.1给出了 $N=25$ 时能量检测器的性能

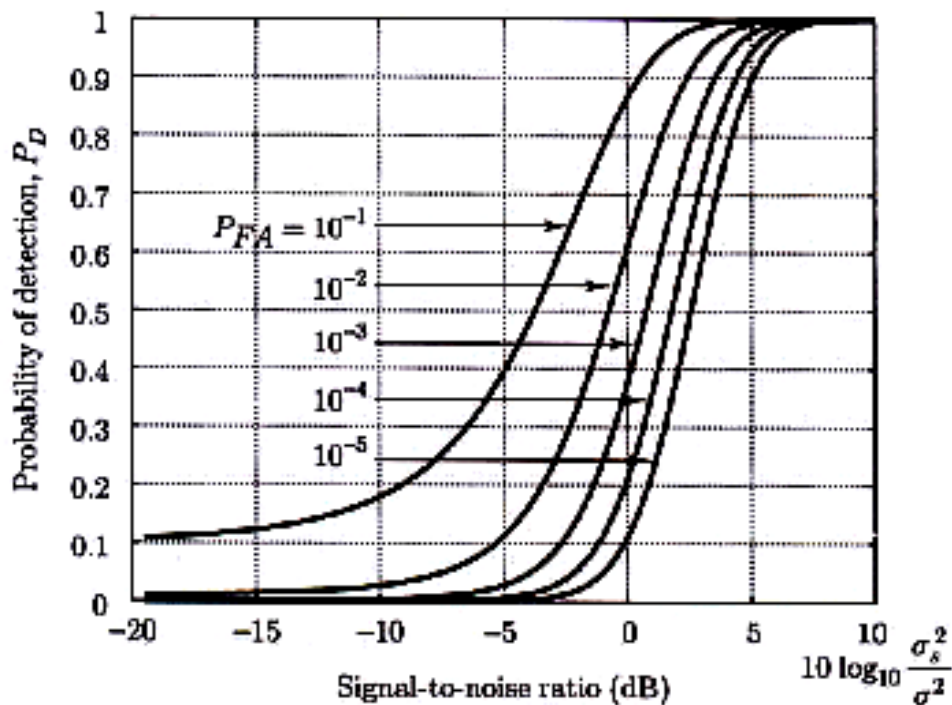


Figure 5.1. Energy detector performance ($N = 25$).



5.3 估计器—相关器

将能量检测器推广到具有任意协方差矩阵的信号。
假定 $s[n]$ 是零均值，协方差为 C_s 的高斯随机过程，
噪声是与信号独立的方差为 σ^2 的WGN，因此

$$x \sim \begin{cases} N(0, \sigma^2 I), \text{ 在 } H_0 \text{ 条件下} \\ N(0, C_s + \sigma^2 I), \text{ 在 } H_1 \text{ 条件下} \end{cases}$$

5.3 估计器—相关器

$$\text{如果 } L(\mathbf{x}) = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det^{\frac{1}{2}}(C_s + \sigma^2 I)} \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T (C_s + \sigma^2 I)^{-1} \mathbf{x}\right]}{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{x}^T \mathbf{x}\right)} > \gamma,$$

*NP*检测器判 H_1 。取对数并且只取与数据有关的项，

$$-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \left[(C_s + \sigma^2 I)^{-1} - \frac{1}{\sigma^2} I \right] \mathbf{x} > \gamma'$$

$$\text{或者 } T(\mathbf{x}) = \sigma^2 \mathbf{x}^T \left[\frac{1}{\sigma^2} I - (C_s + \sigma^2 I)^{-1} \right] \mathbf{x} > 2\gamma'\sigma^2$$

$$T(x) = \sigma^2 x^T \left[\frac{1}{\sigma^2} I - (C_s + \sigma^2 I)^{-1} \right] x > 2\gamma' \sigma^2$$

5.3 估计器—相关器

利用矩阵求逆引理, $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1}$

令 $A = \sigma^2 I, B = D = I, C = C_s$, 我们有

$$(\sigma^2 I + C_s)^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} I - \frac{1}{\sigma^4} \left(\frac{1}{\sigma^2} I + C_s^{-1} \right)^{-1}$$

故 $T(x) = x^T \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} I + C_s^{-1} \right)^{-1} \right] x$, 令

$$\hat{s} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} I + C_s^{-1} \right)^{-1} x = \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{1}{\sigma^2} (\sigma^2 I + C_s) C_s^{-1} \right]^{-1} x = C_s (\sigma^2 I + C_s)^{-1} x$$

因此, 如果 $T(x) = x^T \hat{s} > \gamma''$, 我们判 H_1 。NP检测器将接收到的数据与信号的估计 \hat{s} 进行相关运算, 因此也称为估计器—相关器。

可以看出, \hat{s} 是维纳滤波估计器。

5.3 估计器—相关器

如果 θ 是一个要根据数据矢量 x 来估计它的现实的未知随机矢量，且 θ 和 x 是联合高斯的，均值为零，则MMSE估计器为 $\hat{\theta} = C_{\theta x} C_{xx}^{-1} x$ ，其中 $C_{\theta x} = E(\theta x^T)$ ， $C_{xx} = E(x x^T)$ 。

由于联合高斯的假定，MMSE估计器是线性的，因而 $\theta = s$ ， $x = s + w$ ， s 和 w 是不相关的，因此信号现实的MMSE估计为

$$\hat{s} = E \left[s(s + w)^T \right] \left(E \left[(s + w)(s + w)^T \right] \right)^{-1} x = C_s (C_s + \sigma^2 I)^{-1} x$$

5.3 估计器—相关器

$$\hat{s} = E \left[s(s+w)^T \right] \left(E \left[(s+w)(s+w)^T \right] \right)^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{C}_s (\mathbf{C}_s + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{x}$$

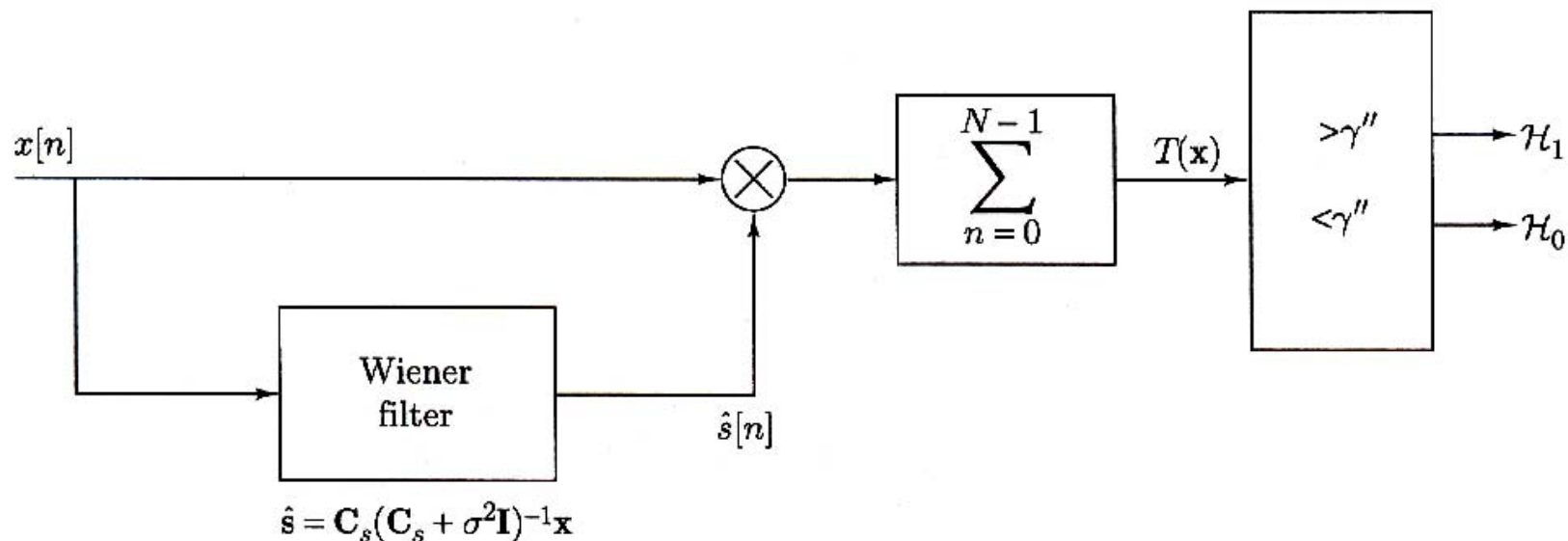


Figure 5.2. Estimator-correlator for detection of Gaussian random signal in white Gaussian noise.

5.3 估计器—相关器

L5.2 能量检测器（继续）—若信号是白色的， $C_s = \sigma_s^2 I$ ，则信号

$$\text{估计器为 } \hat{s} = \sigma_s^2 I (\sigma_s^2 I + \sigma^2 I)^{-1} X = \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2 + \sigma_s^2} X$$

$$\text{或 } \hat{s}[n] = \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2 + \sigma_s^2} x[n]$$

此为一个零记忆滤波器，它用一个固定的比例因子 $\sigma_s^2 / (\sigma^2 + \sigma_s^2)$ 对接收的数据加权。此时将已知的比例因子合并到门限中就可以简化检测器，即

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \hat{s}[n] = \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2 + \sigma_s^2} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] > \gamma''$$

$$\text{或 } \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] > \frac{\gamma'' (\sigma^2 + \sigma_s^2)}{\sigma_s^2}, \text{ 判 } H_1 \text{ 成立。}$$

5.3 估计器—相关器

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_s^2(1+\rho)}{\sigma_s^2(1+\rho)+\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_s^2(1-\rho)}{\sigma_s^2(1-\rho)+\sigma^2} \end{bmatrix}$$

L5.3 相关信号：假定 $N=2$, $C_s = \sigma_s^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$, 其中 ρ 是 $s[0]$, $s[1]$

之间的相关系数。则检验统计量为 $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T C_s (C_s + \sigma^2 I)^{-1} \mathbf{x}$
 令 $\mathbf{y} = V^T \mathbf{x}$, 根据它而不是根据 \mathbf{x} 来表示检验统计量是有优势的,

其中 $V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, 为正交矩阵, 且有 $V^T = V^{-1}$, 于是有

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T V V^T C_s V V^{-1} (C_s + \sigma^2 I)^{-1} V V^T \mathbf{x} \\ &= (V^T \mathbf{x})^T (V^T C_s V) (V^T C_s V + \sigma^2 I)^{-1} V^T \mathbf{x} \end{aligned}$$

现在 $V^T C_s V = \Lambda_s$, 其中 Λ_s 是对角矩阵, $\Lambda_s = \sigma_s^2 \begin{bmatrix} 1+\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{bmatrix}$

检验统计量变为:

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \Lambda_s (\Lambda_s + \sigma^2 I)^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T A \mathbf{y}$$

A 是对角矩阵

5.3 估计器—相关器

$$\text{因此, } T(x) = \frac{\sigma_s^2(1+\rho)}{\sigma_s^2(1+\rho) + \sigma^2} y^2[0] + \frac{\sigma_s^2(1-\rho)}{\sigma_s^2(1-\rho) + \sigma^2} y^2[1]$$

首先将数据从 x 线性地变换到 y , 之后应用加权能量检测器。

$$\text{如果 } \rho = 0, \text{ 正好有 } T(x) = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma^2} (x^2[0] + x^2[1])$$

与例5.2类似

注意到线性变换的效果是对 x 去相关。为了理解这一点, 在 H_1 条件下有

$$\begin{aligned} C_y &= E(yy^T) = E(V^T x x^T V) = V^T C_x V = V^T (C_s + \sigma^2 I) V \\ &= V^T C_s V + \sigma^2 I = \Lambda_s + \sigma^2 I \end{aligned}$$

它是一个对角矩阵, 类似地, 在 H_0 条件下有 $C_y = \sigma^2 I$ 。因此 y 是由不相关的随机变量组成的。由于方差不等, 能量检测器对 $y[n]$ 平方的加权也是不同的。

5.3 估计器—相关器

去相关矩阵正好是 C_s 的模态矩阵(modal matrix) (模态矩阵 V 将一个对称矩阵对角化, 可用于将一组随机变量去相关) 令 $N \times N$ 协方差矩阵 C_s 的特征分解为 $V^T C_s V = \Lambda_s$, 其中 $V = [v_0 \quad v_1 \quad \cdots \quad v_{N-1}]$, v_i 是 C_s 的第 i 个特征矢量; $\Lambda_s = \text{diag}(\lambda_{s_0} \quad \lambda_{s_1} \quad \cdots \quad \lambda_{s_{N-1}})$, λ_{s_i} 是对应的第 i 个特征值。
 NP 检测器变成标准形式, 如下图所示

$$\begin{aligned} T(x) &= x^T C_s (C_s + \sigma^2 I)^{-1} x = y^T \Lambda_s (\Lambda_s + \sigma^2 I)^{-1} y \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\lambda_{s_n}}{\lambda_{s_n} + \sigma^2} y^2[n] \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.3 估计器—相关器

加权系数 $\lambda_{s_n} / (\lambda_{s_n} + \sigma^2)$ 实际上是变换空间中维纳滤波器的加权。

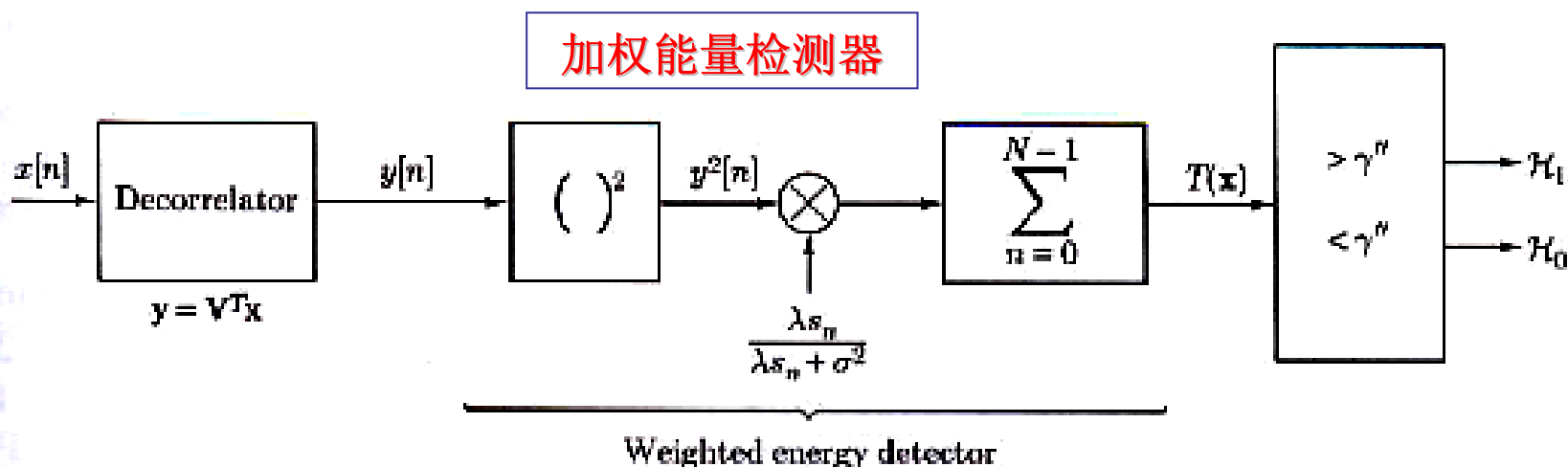


Figure 5.3. Canonical form for detection of Gaussian random signal in white Gaussian noise.

5.3 估计器—相关器

如图5.4, 对于 $\rho=1$, 信号的PDF集中于直线 $\xi_1=\xi_0$ 。沿着这条直线的x分量有可能远大于当信号出现时沿着正交线 $\xi_1=-\xi_0$ 的分量。对于没有信号的情况, 就不存在着优先考虑的方向。另外, 对 $y[0]$ 分量的信噪比大于对 $y[1]$ 分量的信噪比。由于在 H_1 条件下 $C_y = \Lambda_s + \sigma^2 I$, $y[0]$ 分量和 $y[1]$ 分量的信噪比分别为

$$\eta_0^2 = \frac{E(y_s^2[0])}{E(y_w^2[0])} = \frac{\lambda_{s_0}}{\sigma^2} = \frac{\sigma_s^2(1+\rho)}{\sigma^2} \approx \frac{2\sigma_s^2}{\sigma^2} \gg 1$$

$$\eta_1^2 = \frac{E(y_s^2[1])}{E(y_w^2[1])} = \frac{\lambda_{s_1}}{\sigma^2} = \frac{\sigma_s^2(1-\rho)}{\sigma^2} \approx 0$$

这说明了能量检测器样本的加权。

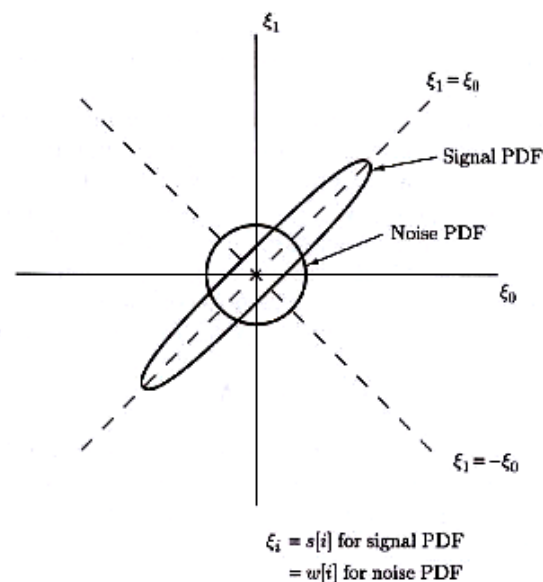


Figure 5.4. Contours of constant PDF for signal only and noise only.

能量检
测器

$$P_{FA} = \Pr\{T(x) > \gamma'; H_0\} = \Pr\left\{\frac{T(x)}{\sigma^2} > \frac{\gamma'}{\sigma^2}; H_0\right\} = Q_{\chi_N^2}\left(\frac{\gamma'}{\sigma^2}\right)$$
$$\text{和 } P_D = \Pr\{T(x) > \gamma'; H_1\} = Q_{\chi_N^2}\left(\frac{\gamma'}{\sigma^2 + \sigma_s^2}\right)$$

5.3 估计器—相关器的性能

估计器—相关器的检测性能难以解析地确定。由式

$$T(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\lambda_{s_n}}{\lambda_{s_n} + \sigma^2} y^2[n]$$
给出的检验统计量是独立 χ_1^2 随机

变量的加权和，而不能像能量检测器那样得到成比例的 χ_N^2 的PDF。可以证明其性能为

$$P_{FA} = \int_{\gamma'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{1 - 2j\alpha_n \omega}} \exp(-j\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} dt$$
$$P_D = \int_{\gamma'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{1 - 2j\lambda_{s_n} \omega}} \exp(-j\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} dt$$

这里 $\alpha_n = \frac{\lambda_{s_n} \sigma^2}{\lambda_{s_n} + \sigma^2}$ ，可以看出里面的积分是傅立叶反变换，并且是 $T(x)$ 的PDF。一般情况下需要数值计算。

5.3 估计器—相关器的推广

估计器—相关器可以推广到观测噪声 $w[n]$ 是有色高斯的情形。如果噪声的协方差矩阵是 C_w ，那么NP检测器为：

$$T(x) = x^T C_w^{-1} \hat{s}$$

参考习题5.11

$$\hat{s} = C_s (C_s + C_w)^{-1} x$$

它是由噪声（ C_w^{-1} 项）的预白化器和经过修正的维纳滤波器或等价的 s 的MMSE估计器组成。

5.4 线性模型

随机信号的线性模型—检测问题变为

$$H_0 : x = w$$

$$H_1 : x = H\theta + w$$

贝叶斯线性模型

注意到 $s = H\theta \sim N(0, HC_\theta H^T)$, 这样

如果 $T(x) = x^T C_s (C_s + \sigma^2 I)^{-1} x > \gamma''$, 估计器—相关器判 H_1

或者替换 C_s , 如果

$$T(x) = x^T HC_\theta H^T (HC_\theta H^T + \sigma^2 I)^{-1} x > \gamma'', \text{ 判 } H_1$$

也可以证明它可以化简为 $T(x) = x^T \hat{s} = x^T H \hat{\theta}$, 其中 $\hat{\theta}$ 是 θ 的 *MMSE* 估计器。这一结果的一个很重要的应用是瑞利衰落正弦信号。



L5.5瑞利衰落正弦信号

在瑞利衰落模型中我们假定，当存在信号时，观测到

$$\mathbf{x}[n] = A \cos(2\pi f_0 n + \phi) + w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1, 0 < f_0 < 1/2$$

$w[n]$ 是方差为 σ^2 的WGN。关键的假定涉及幅度和相位的模型，在时变多路径信号环境下，发射的正弦信号在接收机端以窄带随机过程出现，如图5.5所示。

原因一信号是沿着不同的路径到达接收机的。网的效应将引起相长干涉或相消干涉，导致不可预测的幅度和相位。此外，由于移动发射机和/或移动接收机，或者信号的非平稳特性，信道的传播特征将随时间变化。这引起了接收的正弦信号的幅度和相位随时间变化。

L5.5瑞利衰落正弦信号

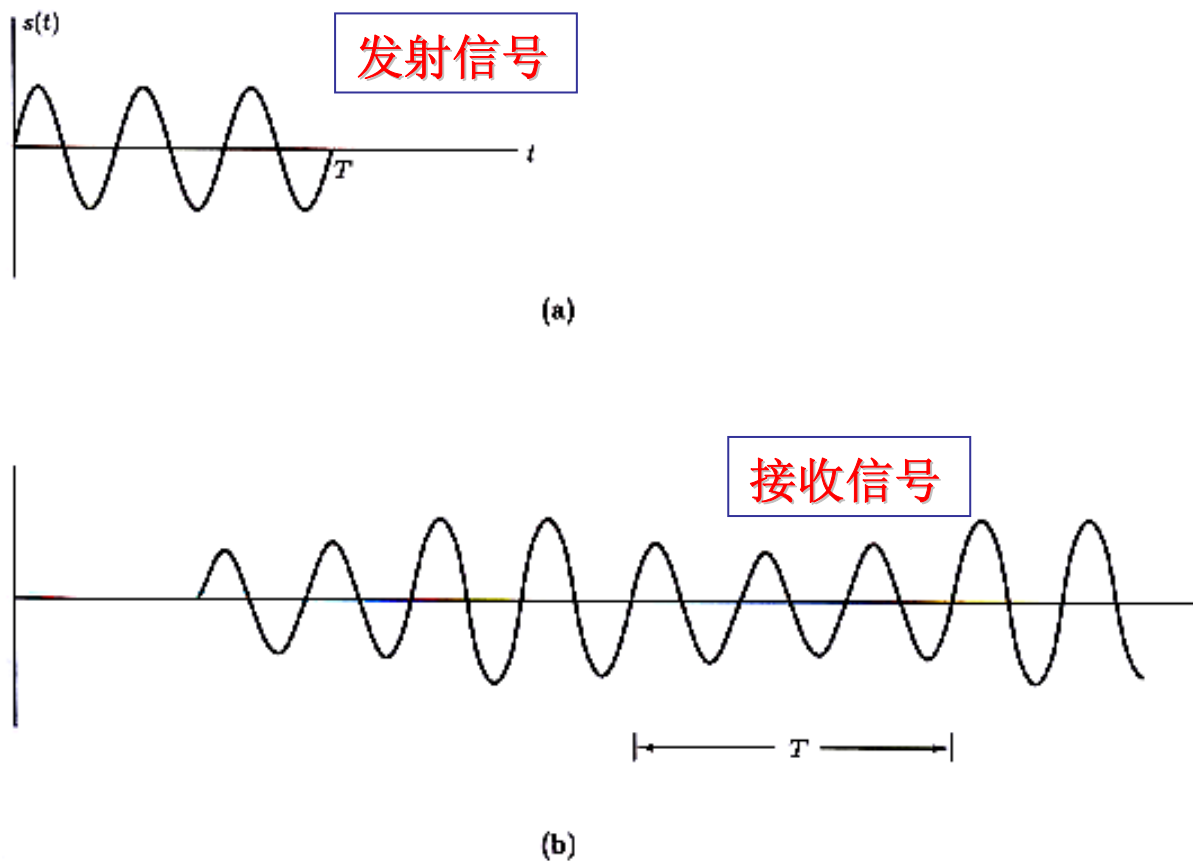


Figure 5.5. Typical input and output signals for multipath channel (a) Transmit signal (b) Received signal.



L5.5瑞利衰落正弦信号

- 如果观测时间间隔 T 较短，如图5.5，可以把接收信号看作纯正弦信号，而其幅度和相位是未知的。
- 假定它们是相互独立的随机变量是合理的，这里不指定 A 和 Φ 的PDF，而是将信号更方便地表示为

$$s[n] = A \cos(2\pi f_0 n + \phi) = a \cos 2\pi f_0 n + b \sin 2\pi f_0 n$$

其中 $a = A \cos \phi$, $b = -A \sin \phi$.

L5.5瑞利衰落正弦信号

注意到信号模型与参数 a, b 是线性的，从数学上的简单性考虑以及借助于中心极限定理（多路径到达信号的迭加性）

假定 $\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \sim N(0, \sigma_s^2 I)$, θ 与 $w[n]$ 独立，由于

$$E(s[n]) = E(a) \cos 2\pi f_0 n + E(b) \sin 2\pi f_0 n = 0$$

$$E(s[n]s[n+k]) = \sigma_s^2 \cos 2\pi f_0 k$$

因此， $s[n]$ 是WSS随机过程，其ACF为 $r_{ss}[k] = \sigma_s^2 \cos 2\pi f_0 k$ ，并且可以证明 $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ 的PDF是瑞利的，或者

$$p(A) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right), & A > 0 \\ 0, & A < 0 \end{cases}$$

幅度
衰落

而 $\phi = \arctan(-b/a)$ 的PDF是 $U[0, 2\pi]$ ， A 和 ϕ 是相互独立的。

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1}$$

$$\text{令 } A = \sigma^2 I, B = \sigma_s^2 H, C = I, D = H^T$$

L5.5 瑞利衰落正弦信号

根据贝叶斯线性模型 $x = H\theta + w$, 其中

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos 2\pi f_0 & \sin 2\pi f_0 \\ \vdots & \vdots \\ \cos 2\pi f_0 (N-1) & \sin 2\pi f_0 (N-1) \end{bmatrix}, \theta \sim N(0, \sigma_s^2 I)$$

$w \sim N(0, \sigma^2 I)$, θ 与 w 统计独立。则 NP 检测器为

$$\begin{aligned} T(x) &= x^T H C_\theta H^T (H C_\theta H^T + \sigma^2 I)^{-1} x \\ &= \sigma_s^2 x^T H H^T (\sigma_s^2 H H^T + \sigma^2 I)^{-1} x \\ &= \sigma_s^2 x^T H H^T \left[\frac{1}{\sigma^2} I - \frac{1}{\sigma^4} \sigma_s^2 H \left(\frac{\sigma_s^2 H H^T}{\sigma^2} + I \right)^{-1} H^T \right] x \end{aligned}$$

L5.5瑞利衰落正弦信号

如果假定 N 很大, 且 $0 < f_0 < 1/2$, 可推出 $H^T H \approx (N/2)I$, 因此

$$\begin{aligned} T(x) &= \sigma_s^2 x^T H H^T \left[\frac{1}{\sigma^2} I - \frac{\sigma_s^2}{\sigma^4} H \frac{1}{\frac{N\sigma_s^2}{2\sigma^2} + 1} H^T \right] x \\ &= \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2} x^T H H^T x - \frac{\frac{N\sigma_s^4}{2\sigma^4}}{\frac{N\sigma_s^2}{2\sigma^2} + 1} x^T H H^T x = \frac{c}{N} x^T H H^T x \end{aligned}$$

其中 $c = N\sigma_s^2 / (N\sigma_s^2 / 2 + \sigma^2) > 0$



L5.5瑞利衰落正弦信号

把正的常数合并到门限中可得

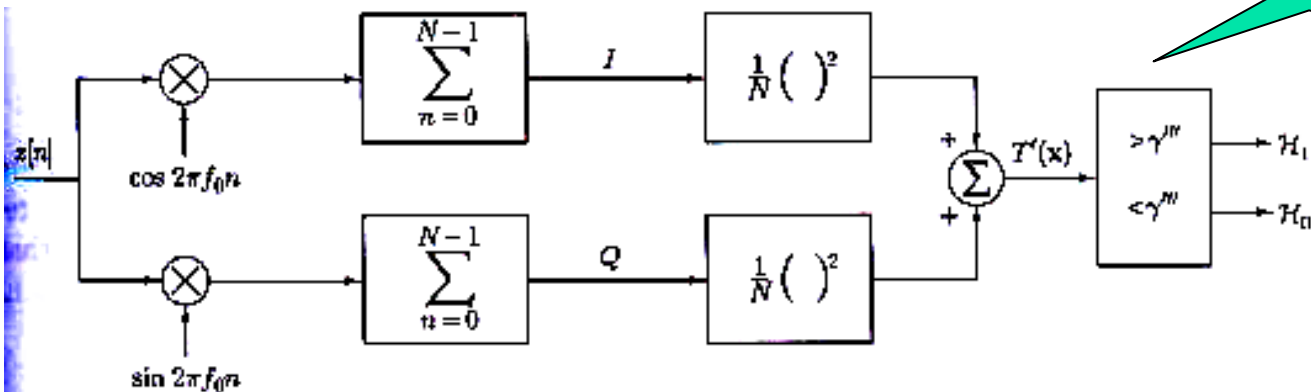
$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{1}{N} x^T H H^T x = \frac{1}{N} \|H^T x\|^2 \\ &= \frac{1}{N} \left[\left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos 2\pi f_0 n \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin 2\pi f_0 n \right)^2 \right] \quad (5.19) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi f_0 n) \right|^2 \quad (5.20)$$

如果 $T'(x) > \gamma'' / c = \gamma'''$, 则判 H_1 成立, 如图5.6所示

L5.5瑞利衰落正弦信号

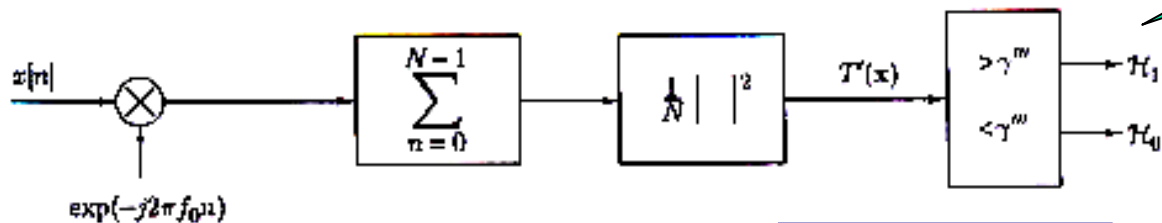
5.19式



(a)

正交或非相干匹配滤波器

5.20式



(b)

周期图检测器

Figure 5.6. Equivalent detectors for Rayleigh fading sinusoid in white Gaussian noise (a) Quadrature or incoherent matched filter (b) Periodogram detector.

L5.5瑞利衰落正弦信号

- 第一种方案：将数据与余弦（同相）和正弦信号（正交）进行相关。由于相位是随机的，如果存在信号，那么其中的一个输出或两个输出（**I**或**Q**）的幅度较大，由于相关器输出的符号可能是正的或负的，因此将**I**和**Q**的输出平方后求和一正交匹配滤波器或非相干匹配滤波器
- 第二种方案：周期图检测器。计算 **$x[n]$** 的傅立叶变换，接着是幅度平方运算，再乘以 **$1/N$** ，后与门限进行比较。也可以解释为**PSD**估计器。当信号出现时，在已知频率 **f_0** 处有一个大的峰值。

L5.5瑞利衰落正弦信号

正交匹配滤波器的性能:

$$P_{FA} = \exp\left(-\frac{\gamma'''}{\sigma^2}\right) \quad (5.21); P_D = \exp\left(-\frac{\gamma'''}{N\sigma_s^2/2 + \sigma^2}\right) \quad (5.22)$$

令 $\bar{\eta} = NE(A^2/2)/\sigma^2 = N\sigma_s^2/\sigma^2$ 为平均ENR。

注意到信号能量是 $\bar{\mathcal{E}} = NE(A^2/2)$ 。可得门限为

$$\gamma''' = \sigma^2 \ln \frac{1}{P_{FA}}, P_D = P_{FA}^{\frac{1}{1+\bar{\eta}/2}}$$

随着 $\bar{\eta} = \bar{\mathcal{E}}/\sigma^2$ 的增加, 检测概率增加得很慢。如图5.7所示, 这是因为正弦信号幅度有瑞利PDF。甚至随着 σ_s^2 的增加, 正弦信号幅度小的概率仍然很高。这使得平均检测概率不会随着 σ_s^2 的增加而迅速增加。

左偏峰形状

L5.5瑞利衰落正弦信号

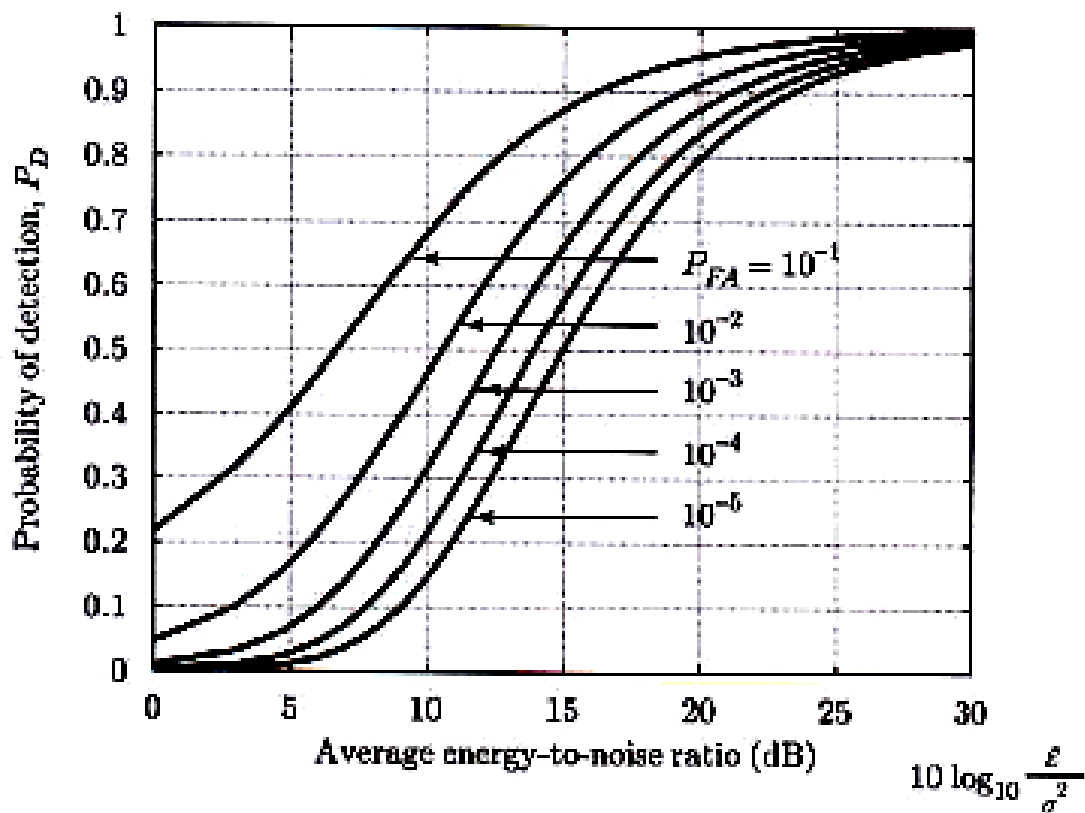


图5.7 瑞利衰落正弦信号的检测性能

Figure 5.7. Detection performance for Rayleigh fading sinusoid.

L5.5瑞利衰落正弦信号

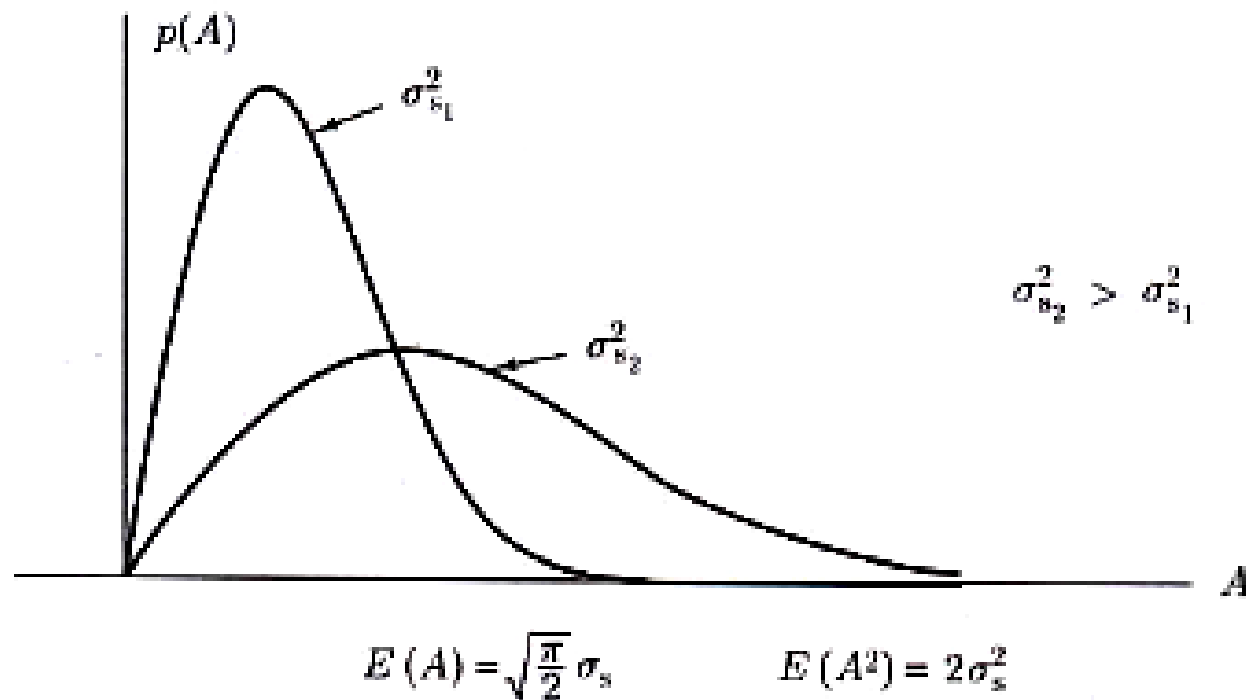


Figure 5.8. PDF for Rayleigh amplitude.

L5.6 多路径信道的非相干FSK

现在来考虑信号 $s_0[n] = \cos 2\pi f_0 n$ 或 $s_1[n] = \cos 2\pi f_1 n$ 通过瑞利衰落信道后的检测问题。假定 $0 < f_0 < 1/2, 0 < f_1 < 1/2$, N 很大, 因此在信道的输出端, 有如下检测问题:

$$H_0 : x[n] = A_0 \cos(2\pi f_0 n + \phi_0) + w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$H_1 : x[n] = A_1 \cos(2\pi f_1 n + \phi_1) + w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

其中 $w[n]$ 是方差为 σ^2 的WGN, 假定正弦信号的幅度和相位为瑞利衰落模型。此外, $[A_0 \ \phi_0]^T$ 和 $[A_1 \ \phi_1]^T$ 的PDF是相同的, 希望设计接收机使错误概率 P_e 最小。

L5.6 多路径信道的非相干FSK

对于每个信号传输的先验概率相等的情况，如果 $\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} > 1$,

则判 H_1 。可推出如果 $I(f_1) > I(f_0)$, 则判 H_1 , 其中 $I(f_i)$ 是周期图

$$I(f_i) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi f_i n) \right|^2, \text{接收机如图5.9所示。}$$

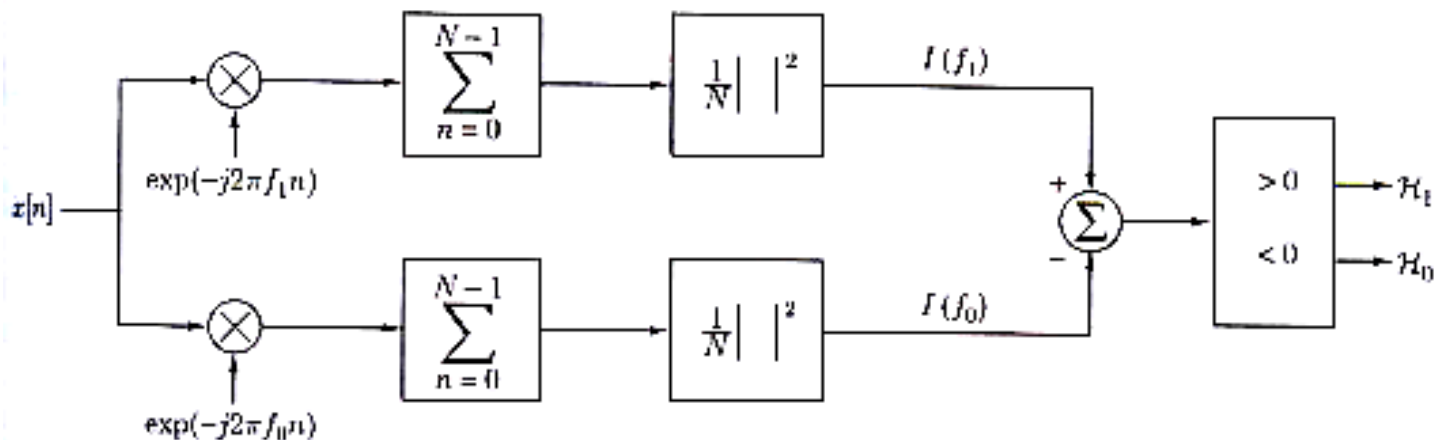


Figure 5.9. Incoherent FSK receiver for Rayleigh fading channel.

L5.6 多路径信道的非相干FSK

为了确定 P_e , 假定选择频率使得 $I(f_1)$ 在 f_0 不受信号的影响, 反之亦然。则在信号传输的先验概率相等的情况下,

$$P_e = \frac{1}{2} (P(H_1 | H_0) + P(H_0 | H_1))$$

由对称性, 可推出

$$\begin{aligned} P_e &= P(H_0 | H_1) = \Pr\{I(f_0) > I(f_1) | H_1\} \\ &= \int_0^\infty \Pr\{I(f_1) < t | I(f_0) = t, H_1\} p_{I(f_0)}(t | H_1) dt \\ &= \int_0^\infty \Pr\{I(f_1) < t | H_1\} p_{I(f_0)}(t | H_1) dt \end{aligned}$$

其中 $p_{I(f_0)}(t | H_1)$ 是 H_1 已经发生的条件下 $I(f_0)$ 的PDF. 对于频率分得很开的情况, 统计量 $I(f_0)$, $I(f_1)$ 近似是独立的。

$$P_{FA} = \exp\left(-\frac{\gamma'''}{\sigma^2}\right) \quad (5.21); P_D = \exp\left(-\frac{\gamma'''}{N\sigma_s^2/2 + \sigma^2}\right) \quad (5.22)$$

L5.6 多路径信道的非相干FSK

进一步地, $p_{I(f_0)}(t | H_1) = \frac{1}{\sigma^2} \exp(-t/\sigma^2)$ (在 H_1 条件下, $I(f_0)$ 只与噪声有关, 信号 $A_1 \cos(2\pi f_1 n + \phi_1)$ 对 $f = f_0$ 的周期图没有贡献, 根据 (5.21) 式可求出), 所以

$$P_e = \int_0^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{N\sigma_s^2/2 + \sigma^2}\right) \right] \frac{1}{\sigma^2} \exp(-t/\sigma^2) dt = \frac{1}{2 + \frac{\bar{\eta}}{2}}$$

其中, $\bar{\eta} = \bar{\mathcal{E}} / \sigma^2 = NE(A_i^2/2) / \sigma^2$ 。图5.10给出了多路径的非相干FSK接收机的性能与具有理想信道的相干FSK接收机的性能进行了比较 (后者的性能为 $P_e = Q\left(\sqrt{\mathcal{E}/(2\sigma^2)}\right)$, \mathcal{E} 是确定性正弦信号的能量, 接收的信号是 $A \cos 2\pi f_0 n$ 和 $A \cos 2\pi f_1 n$, 它们的能量是近似相等的, 且为 $\mathcal{E} \approx NA^2/2$)。

L5.6 多路径信道的非相干FSK

P_e 随着平均ENR的增加减少得非常慢。

在许多通信系统中，这种高的错误概率是不能接受的。为了减少错误概率，必须采用其它的一些技术，如TDL技术。

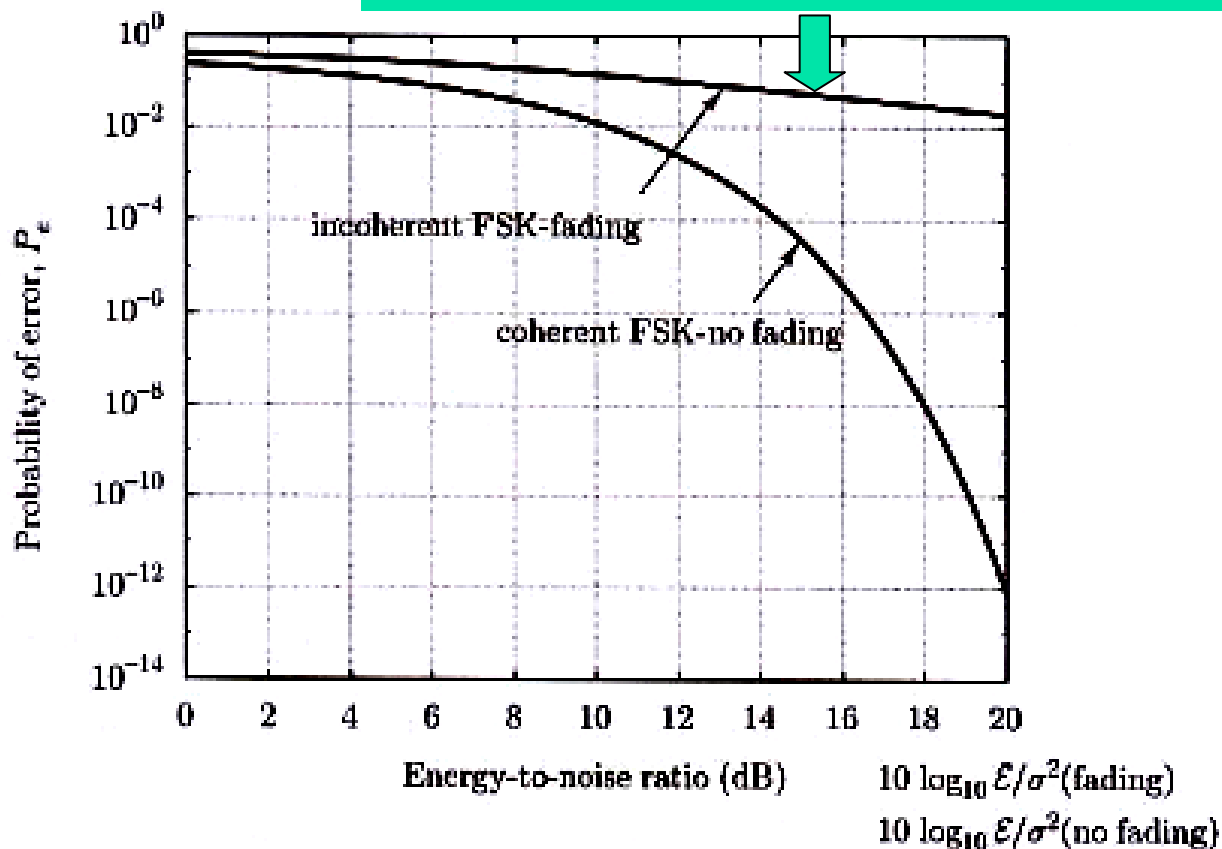


Figure 5.10. Comparison of performance for optimal receivers for perfect channel and Rayleigh fading channel.

$$I(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi fn) \right|^2 \text{ 是周期图}$$

5.5 大数据记录的估计器—相关器

- 对于WGN中WSS高斯随机信号的检测，对于大的N，估计器-相关器可以用一个基于s[n]的PSD的检测器来近似。
- 解决办法
 - 引用 $N \times N$ Toeplitz矩阵的性质，习题5.20
 - 从使用PDF的渐进形式进行推导。

如果 $x[n]$ 是PSD为 $P_{xx}(f)$ 的零均值WSS高斯随机过程，对于大的数据记录，对数PDF可以近似为

$$\ln p(\mathbf{x}) \approx -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln P_{xx}(f) df - \frac{N}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{I(f)}{P_{xx}(f)} df$$

$$I(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi fn) \right|^2 \text{ 是周期图}$$

5.5 大数据记录的估计器—相关器

如果 $l(x) = \ln p(x; H_1) - \ln p(x; H_0) > \gamma'$, NP检测器判 H_1 。

在 H_0 条件下, $x[n] = w[n]$, $P_{xx}(f) = \sigma^2$, 在 H_1 条件下,

$x[n] = s[n] + w[n]$ 以及 $P_{xx}(f) = P_{ss}(f) + \sigma^2$, 因此

$$l(x) = -\frac{N}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{P_{ss}(f)}{\sigma^2} + 1 \right) df + \frac{N}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} I(f) \ln \left(\frac{P_{ss}(f)}{(P_{ss}(f) + \sigma^2)\sigma^2} + 1 \right) df$$

将与数据无关的项合并到门限中, 如果

$$T(x) = N \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{P_{ss}(f)}{P_{ss}(f) + \sigma^2} I(f) df > \gamma'', \text{ 则判 } H_1。$$

$$T(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{X(f)S^*(f)}{P_{ww}(f)} df \quad (4.17) \quad \text{其中 } P_{ww}(f) = \sigma^2$$

$$S(f) = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \exp(-j2\pi fn), X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi fn)$$

5.5 大数据记录的估计器—相关器

注意到 $H(f) = \frac{P_{ss}(f)}{P_{ss}(f) + \sigma^2}$ 是无限长度的维纳平滑滤波器的频率响应。

它是频率的实函数，因此

$$T(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H(f)X(f)X^*(f)df = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)X^*(f)H(f)df$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)\hat{S}^*(f)df, \text{ 其中 } \hat{S}(f) = H(f)X(f)$$

与已知的确定性信号的检验统计量式(4.17)相比较

是信号傅立叶变换的估计量。另外根据Parseval定理，有如下近似

$$T(x) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\hat{s}[n], \text{ 其中 } \hat{s}[n] = F^{-1}\{H(f)X(f)\}.$$

对于大的数据记录，我们将数据通过维纳滤波器来估计信号，然后将信号的估计与数据在频域进行相关。



5.6 一般高斯检测

- 一般高斯检测问题
 - 最一般的信号假定是允许信号由确定性分量和随机性分量组成，那么信号可以看作为一个随机过程，它的确定性部分对应非零均值，随机性部分对应于具有给定信号协方差矩阵的零均值随机过程。
 - 另外，为了更具一般性，假定噪声协方差是任意的。

5.6 一般高斯检测

一般高斯检测问题:

$$H_0 : x = w$$

$$H_1 : x = s + w$$

其中 $w \sim N(0, C_w)$, $s \sim N(\mu_s, C_s)$, s 和 w 是独立的。因此可以根据均值和协方差的不同, 可以从噪声中将信号识别出来。

如果 $\frac{p(x; H_1)}{p(x; H_0)} > \gamma$, 则 NP 检测器判 H_1 。

取对数并且只留下与数据有关的项, 乘上一个比例因子后
可得检验统计量

$$T(x) = x^T C_w^{-1} x - x^T (C_s + C_w)^{-1} x + 2x^T (C_s + C_w)^{-1} \mu_s - \mu_s^T (C_s + C_w)^{-1} \mu_s$$

5.6 一般高斯检测

根据矩阵求逆引理, $C_w^{-1} - (C_s + C_w)^{-1} = C_w^{-1} C_s (C_s + C_w)^{-1}$

忽略与数据无关的项并乘以比例因子后有

$$T'(x) = x^T (C_s + C_w)^{-1} \mu_s + \frac{1}{2} x^T C_w^{-1} C_s (C_s + C_w)^{-1} x$$

检测统计量由x的二次型和线性项组成, 特殊情况:

1. $C_s = 0$ 或 $s = \mu_s$ 的确定性信号, 则

$$T'(x) = x^T C_w^{-1} \mu_s$$

此即为预白化器和匹配滤波器

2. $\mu_s = 0$ 或 $s \sim N(0, C_s)$ 的随机信号, 则

$$T'(x) = \frac{1}{2} x^T C_w^{-1} C_s (C_s + C_w)^{-1} x = \frac{1}{2} x^T C_w^{-1} \hat{s}$$

其中 $\hat{s} = C_s (C_s + C_w)^{-1} x$ 是 s 的 *MMSE* 估计器, 此即预白化器后接一个估计器—相关器。

L5.7 WGN中的确定/随机性信号

假定 H_0 条件下, $x[n] = w[n]$, H_1 条件下, $x[n] = s[n] + w[n]$, 其中 $w[n]$ 是WGN, $s[n] \sim N(A, \sigma_s^2)$ 且是IID, $s[n]$ 与 $w[n]$ 相互独立。 $s[n]$ 可以看作为确定性电平 A 与方差为 σ_s^2 的白高斯过程之和。由前面 $T'(x) = x^T (C_s + C_w)^{-1} \mu_s + \frac{1}{2} x^T C_w^{-1} C_s (C_s + C_w)^{-1} x$, 令 $C_w = \sigma^2 I$, $\mu_s = A \mathbf{1}$, $C_s = \sigma_s^2 I$, 可得NP检测器为

$$T'(x) = \frac{NA}{\sigma_s^2 + \sigma^2} \bar{x} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_s^2 / \sigma^2}{\sigma_s^2 + \sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

上式是平均器与能量检测器之和, 平均器试图根据均值 \bar{x} 来识别, 而能量检测器试图根据方差 $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$ 来识别。



5.6 一般高斯检测

一般高斯问题的另一个特殊情况是一般贝叶斯线性模型
其中 $s = H\theta$, H 是 $N \times p$ 的矩阵, θ 是 $p \times 1$ 的随机矢量, θ 与 w 独立且 $\theta \sim N(\mu_\theta, C_\theta)$ 。令 $\mu_s = H\mu_\theta, C_s = HC_\theta H^T$, 根据前面
 $T'(x) = x^T (C_s + C_w)^{-1} \mu_s + \frac{1}{2} x^T C_w^{-1} C_s (C_s + C_w)^{-1} x$, 可得出
 $T'(x) = x^T (HC_\theta H^T + C_w)^{-1} H\mu_\theta + \frac{1}{2} x^T C_w^{-1} HC_\theta H^T (HC_\theta H^T + C_w)^{-1} x$

5.7 信号处理的例子—TDL

- 现在将前面的结果应用到通过多径信道的信号检测中—无线通信中的典型问题。
- 对照瑞利衰落正弦信号（L5.5），现在把问题推广到允许发射任意信号的情况，而且，使用一种称为节拍延迟线（如图5.11所示的FIR滤波器）的精确模型。
- 假定发射的信号是伪随机噪声（PRN）序列，由于宽的频谱引起信号频率独立地衰减，这类信号对于多路径环境中的通信是很有用的，可看作为频率分集的方法。

5.7 信号处理的例子—TDL

- 信道的输入输出描述为

$$s[n] = \sum_{k=0}^{p-1} h[k]u[n-k]$$

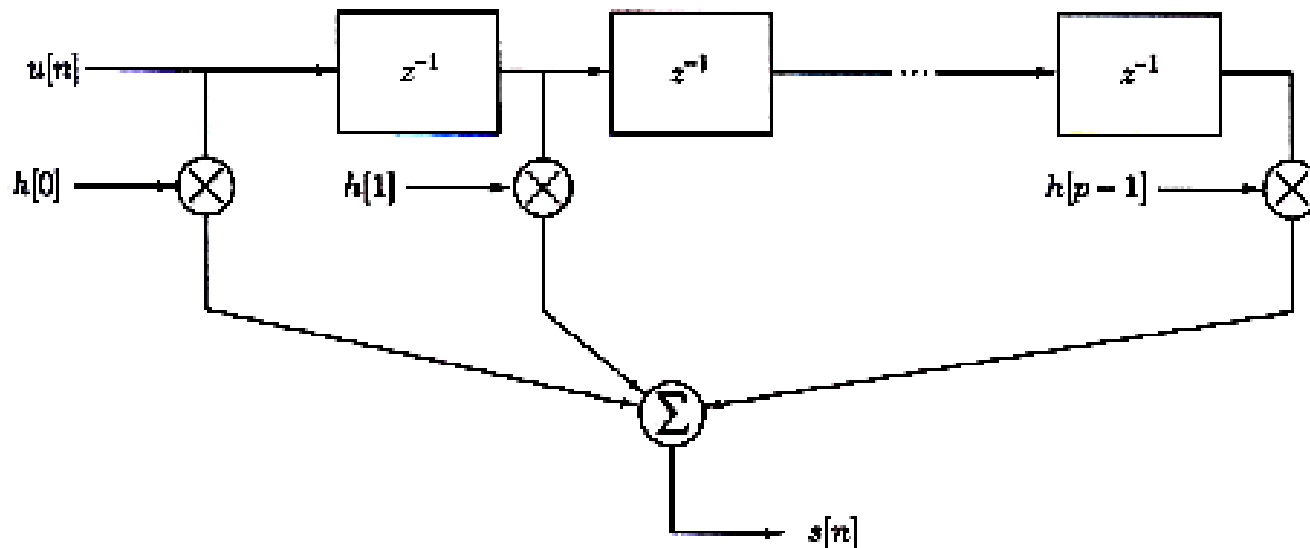


Figure 5.11. Tapped delay line channel model.



5.7 信号处理的例子—TDL

**TDL*加权 $h[k]$ 通常是未知的，当信道特性变化时，*TDL*加权 $h[k]$ 随时间变化，必须使用线性时变滤波器。尽管节拍加权是未知的，但是它们的平均功率有时根据物理散射的考虑是可以确定的。

*假定加权是零均值且 $\text{var}(h[k]) = \sigma_k^2$ 的随机变量，而且假定散射是不相关的，所以对于 $i \neq j, \text{cov}(h[i], h[j]) = 0$ ，这样的模型称为不相关散射模型，而信道模型称为随机线性时不变信道模型。

5.7 信号处理的例子—TDL

*统计描述：假定节拍加权是高斯随机变量，因此

$$h = \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[n] \end{bmatrix} \sim N(0, C_h)$$

注意到，如果发射信号是正弦信号，那么接收信号也是正弦的，尽管幅度和相位是随机的。

其中 $C_h = \text{diag}(\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{p-1}^2)$ ，在声纳系统中，节拍加权的平均功率称为距离散射函数，在通信中称为多径延迟轮廓图。发射信号 $u[n]$ 假定是已知的，注意随机信道的影响使得接收信号也是随机的。在信道输出端的信号迭加上方差为 σ^2 的WGN，所以

$$x[n] = s[n] + w[n] = \sum_{k=0}^{p-1} h[k]u[n-k] + w[n]$$

5.7 信号处理的例子—TDL

*如果输入信号在 $[0, K-1]$ 上是非零的，那么输出信号在 $[0, K+p-2]$ 上是非零的。选择 $N = K+p-2$ ，那么就变成了通常的检测问题

$$H_0 : x[n] = w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$H_1 : x[n] = s[n] + w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

而且由于选择的信道模型是线性的，我们有贝叶斯线性模型或者 $\mathbf{x} = H\theta + w$

*根据 $\theta = h \sim N(0, C_h)$ ，我们假定 θ 与 w 是独立的，因此如果

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T H C_h H^T (H C_h H^T + \sigma^2 I)^{-1} \mathbf{x} > \gamma \quad (5.33), NP \text{检测器判} H_1$$

5.7 信号处理的例子—TDL

*考虑利用PRN发射信号，这个序列具有如下的性质：它的自相关函数近似（对于大的 N ）为一个冲击信号或者

$$r_{uu}[k] = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1-|k|} u[n]u[n+|k|] \approx \sigma_u^2 \delta[k]$$

这里， $\sigma_u^2 = (1/K) \sum_{n=0}^{K-1} u^2[n] = \mathcal{E} / K$ 。

*由于 H 的列是错列形式（对于 $N \times p = (K + p - 1) \times p$ 的矩阵 H ，有 $[H]_{ij} = u[i - j]; i = 0, 1, \dots, N - 1; j = 0, 1, \dots, p - 1$ ），因此它们是近似正交的，因而，

$$H^T H \approx \mathcal{E} I \quad (5.34)$$

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{C}_h \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{C}_h \mathbf{H}^T + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{x} > \gamma'' \quad (5.33)$$

5.7 信号处理的例子—TDL

*根据矩阵求逆引理，可以简化 (5.33) 式

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{H} \underbrace{\left[\frac{\mathbf{C}_h}{\sigma^2} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma^4} \mathbf{C}_h \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma^2} \mathbf{I} + \mathbf{C}_h^{-1} \right)^{-1} \right]}_E \mathbf{H}^T \mathbf{x}$$

这里 E 是对角矩阵，对于 $i = 0, 1, \dots, p-1$ ，第 $[i, i]$ 个元素为

$$[E]_{ii} = \frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}}, \text{ 而且 } \mathbf{H}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{K-1} x[n]u[n] \\ \sum_{n=1}^K x[n]u[n-1] \\ \vdots \\ \sum_{n=p-1}^{K+p-2} x[n]u[n-(p-1)] \end{bmatrix}$$

可以看成是数据 $x[n]$ 与输入信号 $u[n]$ 的每个延迟值的相关。

$$T(x) = x^T C_s (C_s + \sigma^2 I)^{-1} x = y^T \Lambda_s (\Lambda_s + \sigma^2 I)^{-1} y$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\lambda_{s_n}}{\lambda_{s_n} + \sigma^2} y^2[n] \quad (5.9)$$

5.7 信号处理

与 (5.9) 式
的标准形式进
行比较

TDL

令 $z[k] = \sum_{n=k}^{K-1+k} x[n]u[n-k]$, 则有 $z[k] = \sum_{k=0}^{p-1} \mathcal{E} + \frac{\sigma^2}{\sigma_k^2} z[k]$ 。或者如果

$$T(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\mathcal{E}\sigma_k^2}{\mathcal{E}\sigma_k^2 + \sigma^2} \left(\frac{z[k]}{\sqrt{\mathcal{E}}} \right)^2 > \gamma'', \text{ 我们判 } H_1。 \text{ 如图 5.12 所示}$$

*它可以看作是一个最佳非相干多径组合器。对于强的路径，或者 $\mathcal{E}\sigma_k^2 \gg \sigma^2$, 我们给平方相关器输出更重的加权。加权系数实际上是维纳滤波器的加权，因为

$$z[k] = \sum_{n=k}^{K-1+k} x[n]u[n-k] = \sum_{n=k}^{K-1+k} (s[n] + w[n])u[n-k]$$

$$= \sum_{n=k}^{K-1+k} \left(\sum_{l=0}^{p-1} h[l]u[n-l] + w[n] \right) u[n-k] \approx \mathcal{E}h[k] + \sum_{n=k}^{K-1+k} w[n]u[n-k]$$

5.7 信号处理的例子—TDL

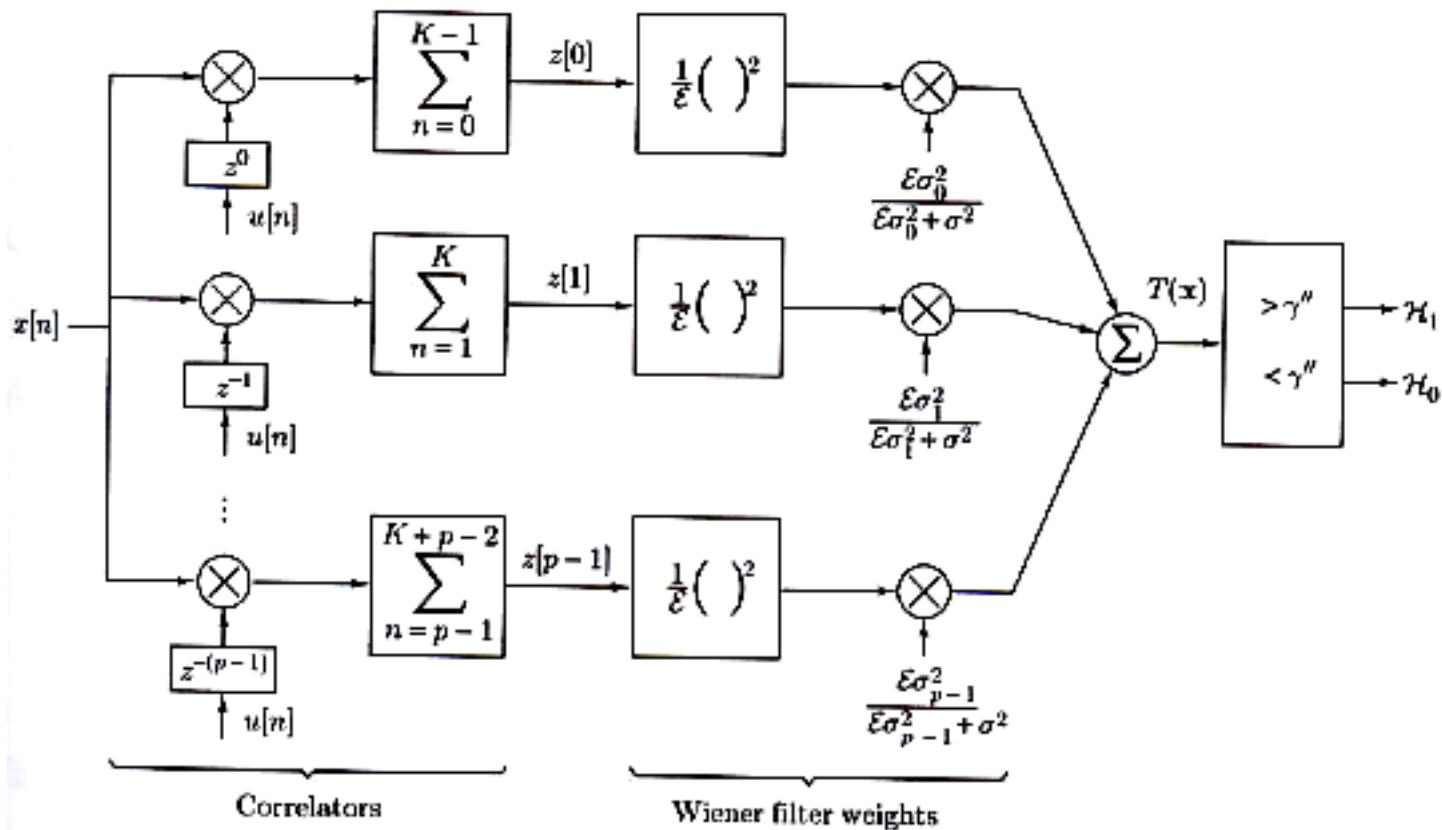


图5.12 随机TDL信道具有伪随机输入信号的最佳多路径组合器

5.7 信号处理的例子—TDL

由于 H 的列近似正交，于是

$$\frac{z[k]}{\sqrt{\mathcal{E}}} = \sqrt{\mathcal{E}}h[k] + \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \sum_{n=k}^{K-1+k} w[n]u[n-k]$$

且 $\text{var}(\sqrt{\mathcal{E}}h[k]) = \mathcal{E}\sigma_k^2$

$$\text{var}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \sum_{n=k}^{K-1+k} w[n]u[n-k]\right) = \frac{1}{\mathcal{E}} \sigma^2 \sum_{n=k}^{K-1+k} u^2[n-k] = \sigma^2$$

根据这些结果， $\mathcal{E}\sigma_k^2 / (\mathcal{E}\sigma_k^2 + \sigma^2)$ 可以解释为第 k 次延迟的维纳滤波器加权。 TDL 信道的性能类似于瑞利衰落信道（参见图5.7），在低的平均 ENR 时性能有轻微的降低，而在高的平均 ENR 时性能有明显的改善。

5.7 信号处理的例子—TDL

图15.4中，对于 $P_{FA} = 10^{-5}$ ，画出两个不同信道的 P_D ，可以看到，对于某个样本平均ENR，检测性能有很大的改善。例如，对于 $P_D = 0.95$ ，对于PRN序列，我们要求的信噪比要小4.3dB。这种差别是由宽带信号的频率分集或等效的是由可分辨的多路径非相干平均的结果。

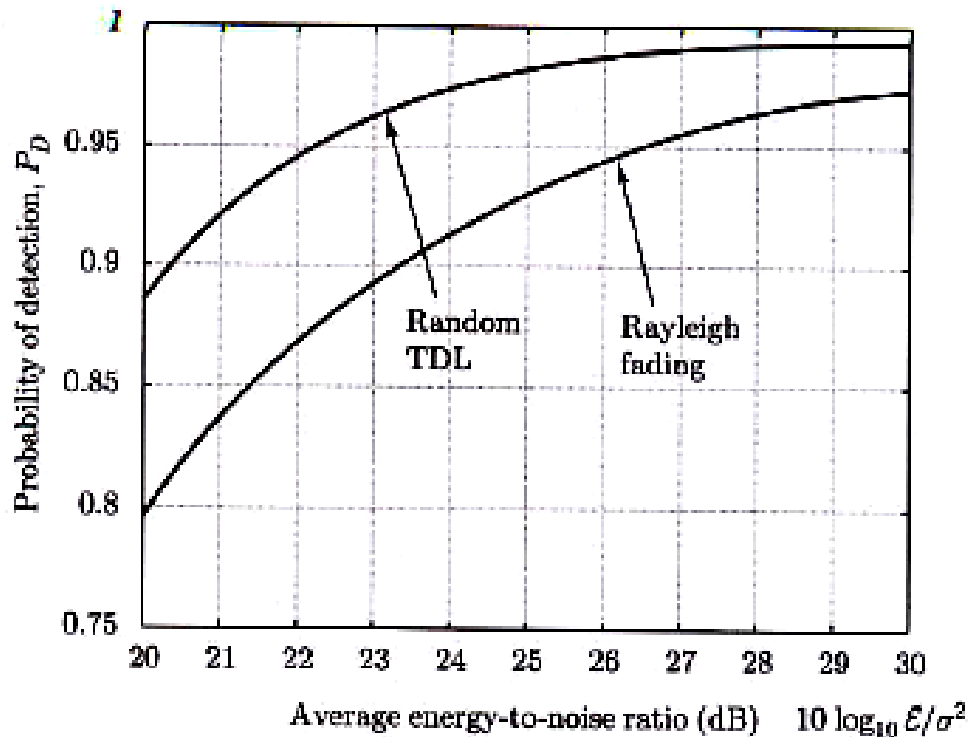


Figure 5.14. Detection performance for PRN signal transmitted via random TDL signal channel.

未知参数的随机性信号检测

8.1 引言

- 本章讨论在高斯白噪声环境下未知参数高斯随机信号的检测问题。（色噪声问题只是一个简单的扩展。假定噪声协方差矩阵是已知的，我们只需要预白化数据，就可以将色噪声问题简化为白噪声中高斯随机信号的检测问题）
- 由于通常都假定信号是零均值的，**不完全已知的正是信号协方差矩阵。**

8.3 信号协方差不完全已知

- 一般而言，对于此类问题，贝叶斯方法由于要求积分运算而使得数学上难以处理。另一方面，GLRT更容易进行解析处理。作为最后的手段，对于GLRT所要求的MLE可以采用数值的方法求得。因此，主要集中在GLRT方法。

一般的问题就是要在WGN中检测高斯随机信号，或者

$$H_0 : x[n] = w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$H_1 : x[n] = s[n] + w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

其中 $s[n]$ 是零均值以及协方差矩阵为 C_s 的高斯随机信号， $w[n] \sim N(0, \sigma^2)$ ，信号协方差与某些未知的参数有关。为了实现GLRT，需要解析地计算协方差矩阵的行列式和逆，这可能是困难的。一般而言，当信号的协方差矩阵依赖于某些未知参数时，任务要更为艰巨。



8.3 信号协方差不完全已知

- 一般而言，对于此类问题，贝叶斯方法由于要求积分运算而使得数学上难以处理。另一方面，GLRT更容易进行解析处理。作为最后的手段，对于GLRT所要求的MLE可以采用数值的方法求得。
- 因此，主要集中在GLRT方法。

$$(\sigma^2 I + C_s)^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} I - \frac{1}{\sigma^4} (\frac{1}{\sigma^2} I + C_s^{-1})^{-1} \quad (5.4)$$

8.3 信号协方差不完全已知

总结：一般问题的GLRT, 如果信号协方差矩阵为 $C_s(\theta)$, 其中 θ 是未知参量矢量, 如果

$$L_G(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}, \hat{\theta}, H_1)}{p(\mathbf{x}; H_0)}$$
$$= \frac{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det^{\frac{1}{2}}(C_s(\hat{\theta}) + \sigma^2 I)} \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T (C_s(\hat{\theta}) + \sigma^2 I)^{-1} \mathbf{x}\right]}{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{x}^T \mathbf{x}\right]} > \gamma$$

$$(\sigma^2 I + C_s)^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} I - \frac{1}{\sigma^4} (\frac{1}{\sigma^2} I + C_s^{-1})^{-1} \quad (5.4)$$

8.3 信号协方差不完全已知

*GLRT*判 H_1 (其中 $\hat{\theta}$ 是 θ 的*MLE*), 或者取对数乘以2,

$$2 \ln L_G(\mathbf{x}) = -\ln \det(C_s(\hat{\theta}) + \sigma^2 I) + N \ln \sigma^2 - \mathbf{x}^T (C_s(\hat{\theta}) + \sigma^2 I)^{-1} \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{\sigma^2}$$

利用(5.4)式有

$$-\mathbf{x}^T (C_s(\hat{\theta}) + \sigma^2 I)^{-1} \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{x}^T C_s(\hat{\theta}) (C_s(\hat{\theta}) + \sigma^2 I)^{-1} \mathbf{x}$$

因此,

$$2 \ln L_G(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{x}^T C_s(\hat{\theta}) (C_s(\hat{\theta}) + \sigma^2 I)^{-1} \mathbf{x} - \ln \det(C_s(\hat{\theta}) + \sigma^2 I) \quad (8.14)$$

8.4 大数据记录的近似

如果信号随机过程是WSS, 那么对于大数据记录可以证明对数似然比为

$$l(\mathbf{x}) = \ln \frac{p(\mathbf{x}; H_1)}{p(\mathbf{x}; H_0)} = -\frac{N}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\ln \left(\frac{P_{ss}(f)}{\sigma^2} + 1 \right) - \frac{P_{ss}(f)}{P_{ss}(f) + \sigma^2} \frac{I(f)}{\sigma^2} \right] df \quad (8.15)$$

其中 $P_{ss}(f)$ 是 $s[n]$ 的PSD, $I(f)$ 是周期图。由于假定只有信号的PSD含有未知参数, MLE 可以通过使 $l(\mathbf{x})$ 最大而求得。这里, $p(\mathbf{x}; H_0)$ 并不依赖于信号参数, 因此, 通过使

$$J(\theta) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\ln \left(\frac{P_{ss}(f; \theta)}{\sigma^2} + 1 \right) - \frac{P_{ss}(f; \theta)}{P_{ss}(f; \theta) + \sigma^2} \frac{I(f)}{\sigma^2} \right] df \quad (8.16)$$

最小可以求得 MLE 。 $P_{ss}(f; \theta)$ 表示了 $P_{ss}(f)$ 对 θ 的依赖性。求得 MLE 后, 如果

$$\ln L_G(\mathbf{x}) = \ln \frac{p(\mathbf{x}; \hat{\theta}, H_1)}{p(\mathbf{x}; H_0)} = -\frac{N}{2} J(\hat{\theta}) > \ln \gamma \text{ 或者 } -J(\hat{\theta}) > \gamma' \quad (8.17)$$

$GLRT$ 判 H_1 .

$$T_{LMP}(x) = \frac{\left. \frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \theta_0}}{\sqrt{I(\theta_0)}} \quad (6.36)$$

8.5 弱信号检测

对于如下的参数检验(单边假设检验)问题

$$H_0 : P_0 = 0$$

$$H_1 : P_0 > 0$$

如果假定信号是弱信号, 或者 P_0 很小, 那么检测问题简化为 P_0 对零点的微小偏离量的检测问题。在这种情况下, 可以使用局部最大势检验(LMP), 去掉归一化因子 $\sqrt{I(P_0)}$ (参见6.36式)

$$\text{如果 } T(x) = \left. \frac{\partial \ln p(x; P_0, H_1)}{\partial P_0} \right|_{P_0=0} > \gamma \quad (8.24)$$

检测器判 H_1 。该检测器的优点是只需要计算一个偏导数, 因此并不要求计算MLE.



Any Questions!

Quiz Time!





附录

- 什么是相干解调？对相干解调的具体要求是什么？
 - 相干解调是在已调信号和相干载波相乘后，经低通滤波器后得到原始信号。
 - 必须在接收端产生与调制载波同频同相的本地载波。



附录

- 在某些通信系统中，由于存在多径衰落，使通信可靠性受到严重威胁。采用**分集接收**技术是抗多径衰落的有效措施之一。
- 所谓**分集接收**，用两套（或多套）收信设备接收同一个信号由发射设备发射的经两条（或多条）不同路径传播的信号，不会同时发生衰落的两路（或多路）信号，并经过某些处理后，在接收端以一定方式将其合并。这样，当其中一个信号发生衰落时，另外一个（或多个）信号不一定也衰落，只要采用适当的信号合成方法就可保证一定的接收电平，克服或改善衰落的影响。
- 常用的分集接收技术有频率分集、空间分集和混合分集。



附录

- **频率分集**是在发信端将一个信号利用两个间隔较大的发射频率同时发射，在收信端同时接收这两个射频频信号后合成，由于工作频率不同，电磁波之间的相关性极小，各电磁波的衰落概率也不同。频率分集抗频率选择性衰落特别有效，但付出的代价是成倍地增加了收发信机，且需成倍地多占用频带，降低了频谱利用率。
- **空间分集**是在收端利用空间位置相距足够远的两副天线，同时接收同一个发射天线发出的信号。两路收信号经时延、相位或幅度的调整后，将按一定的规则进行合成，以减少电波衰落的影响，同时可以提高收信电平。空间分集需要增加收信机，其频谱利用率比频率分集高。



6.6 等效大数据记录检验

- 有两个其他的检验具有与**GLRT**相同的渐进检测性能，然而对于有限数据记录不能保证其性能是相同的。它们主要的优点是**这些渐进统计量可以很容易的计算**。
- **Rao**检验正是这样，因为它不必确定 H_1 条件下的**MLE**,而只需要计算 H_0 条件下的**MLE**。



Wald检验

考虑没有多余参数的情况，希望检验

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

其中 θ 是 $r \times 1$ 的参数矢量，如果

$$T_w(x) = (\hat{\theta}_1 - \theta_0)^T I(\hat{\theta}_1)(\hat{\theta}_1 - \theta_0) > \gamma \quad (6.30)$$

*Wald*检验判 H_1 。其中 $\hat{\theta}_1$ 是 H_1 条件下 θ 的*MLE*，或者等效于 θ 在参数空间无约束的*MLE*。注意 $T_w(x)$ 的计算可能要比

*GLRT*简单，广义似然比 $L_G(x) = \frac{p(x; \hat{\theta}_1, H_1)}{p(x; \theta_0, H_0)}$ 要求计算*PDF*。



Rao检验

如果

$$T_R(x) = \frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0}^T I^{-1}(\theta_0) \frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} > \gamma \quad (6.31)$$

*Rao*检验判 H_1 。在(6.31)式中,由于假定在 H_0 和 H_1 条件下*PDF*只有 θ 的取值不同,所以在*PDF*的表达式中省略了 H_i 。

另外,当*PDF*以 θ 为参数时就不必这样做,对于这种检验,

在 H_1 条件下不要求*MLE*,特别是当 $\frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta} = 0$ 不容易

求解时上述优点是很明显的。在三种检验中,*Rao*检验计算是最简单的。

L6.8 WGN中具有未知幅度的 DC电平—Wald和Rao检验

从例6.4, 我们有检验

$$H_0 : A = 0$$

$$H_1 : A \neq 0$$

所以 $\theta = A, \theta_0 = 0$ 。通过令 $\hat{\theta}_1 = \hat{A} = \bar{\mathbf{x}}$ 和 $I(\hat{\theta}_1) = I(\hat{A}) = N / \sigma^2$, 可以求得Wald检验。则由(6.30)式如果

$$T_w(\mathbf{x}) = \frac{N\bar{\mathbf{x}}}{\sigma^2} > \gamma, \text{Wald检验判} H_1, \text{上式与} GLRT \text{或} 2 \ln L_G(\mathbf{x})$$

是相同的。*Rao*检验要求我们求对数似然比的导数而不是*A*的

$$MLE。 \text{由于} p(\mathbf{x}; A) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - A)^2 \right]$$

L6.8 WGN中具有未知幅度的 DC电平—Wald和Rao检验

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; A)}{\partial A} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - A), \quad \left. \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; A)}{\partial A} \right|_{A=0} = \frac{N\bar{x}}{\sigma^2}$$

另外， $I(\theta_0) = I(A=0) = N/\sigma^2$ 。因此由（6.31）式，

$$T_R(\mathbf{x}) = \left(\frac{N\bar{x}}{\sigma^2} \right)^2 \frac{\sigma^2}{N} = \frac{N\bar{x}^2}{\sigma^2} > \gamma$$

也是与 $GLRT$ 相同的。事实上，本例是线性模型的特殊情况，对于线性模型，三种检验统计量都是相同的。通常情况下，这三种检验产生不同的统计量。

有多余参数时的Wald检验

当出现多余参数时，参数检验问题为式(6.21)所给出的

$$H_0 : \theta_r = \theta_{r_0}, \theta_s$$

$$H_1 : \theta_r \neq \theta_{r_0}, \theta_s$$

Wald检验是

$$T_W(x) = (\hat{\theta}_{r_1} - \theta_{r_0})^T \left([I^{-1}(\hat{\theta}_1)]_{\theta_r \theta_r} \right)^{-1} (\hat{\theta}_{r_1} - \theta_{r_0}) \quad (6.34)$$

其中 $\hat{\theta}_1 = [\hat{\theta}_{r_1}^T \quad \hat{\theta}_{s_1}^T]^T$ 是在 H_1 条件下的MLE(无约束的MLE或者在 θ_r, θ_s 上使 $p(x; \theta) = p(x; \theta_r, \theta_s)$ 达到最大)，并且

$$[I^{-1}(\theta)]_{\theta_r \theta_r} = \left(I_{\theta_r \theta_r}(\theta) - I_{\theta_r \theta_s}(\theta) I_{\theta_s \theta_s}^{-1}(\theta) I_{\theta_s \theta_r}(\theta) \right)^{-1}$$

有多余参数时的Rao检验

当出现多余参数时，参数检验问题为式(6.21)所给出的

$$H_0 : \theta_r = \theta_{r_0}, \theta_s$$

$$H_1 : \theta_r \neq \theta_{r_0}, \theta_s$$

*Rao*检验是

$$T_R(x) = \frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta_r} \Big|_{\theta = \tilde{\theta}} [I^{-1}(\tilde{\theta})]_{\theta_r, \theta_r} \frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta_r} \Big|_{\theta = \tilde{\theta}} \quad (6.35)$$

其中 $\tilde{\theta} = [\theta_{r_0}^T \quad \hat{\theta}_{s_0}^T]^T$ 是在 H_0 条件下的 *MLE* (约束的 *MLE* 或者在 θ_s 上使 $p(x; \theta_{r_0}, \theta_s)$ 达到最大)，每个统计量具有像 *GLRT* 或 $2 \ln L_G(x)$ 一样的渐进 *PDF*。很显然，*Rao* 检验由于只要求计算在 H_0 条件下的 *MLE*，因此计算起来最简单。

L6.10.WGN中具有未知幅度和方差的DC电平—Rao检验

参考例6.5, 有如下参数检验为

$$H_0 : A = 0, \sigma^2 > 0$$

$$H_1 : A \neq 0, \sigma^2 > 0$$

所以 $\theta = [A \ \sigma^2]^T$, $\theta_r = A, \theta_s = \sigma^2$ 。此外在 H_0 条件下 $A = 0$, 因此 $\tilde{\theta} = [0 \ \hat{\sigma}_0^2]^T$, 其中 $\hat{\sigma}_0^2$ 是在 H_0 或者 $A = 0$ 条件下 σ^2 的 *MLE*。由 (6.35) Rao 检验是

$$\begin{aligned} T_R(x) &= \left. \frac{\partial \ln p(x; A, \sigma^2)}{\partial A} \right|_{A=0, \sigma^2=\hat{\sigma}_0^2}^2 [I^{-1}(\tilde{\theta})]_{AA} \\ &= \frac{N\bar{x}^2}{\hat{\sigma}_0^2} \end{aligned}$$

L6.10.WGN中具有未知幅度和方差的DC电平—Rao检验

对于本例，很容易确定GLRT与Rao检验统计量是渐进相同的。回顾式(6.19)和(6.18)式的GLRT统计量

$$2 \ln L_G(x) = N \ln \left(1 + \frac{\bar{x}^2}{\hat{\sigma}_1^2} \right) = N \ln \frac{1}{1 - \frac{\bar{x}^2}{\hat{\sigma}_0^2}}$$

如果 $\bar{x}^2 / \hat{\sigma}_0^2 \ll 1$, 由于对于 $x \ll 1$, $\ln(1/(1-x)) \approx x$, 所以这些统计量是相同的。但是对于大的 N , 在 H_0 条件下, $\bar{x} \rightarrow 0$, 而在 H_1 条件下, $\bar{x} \rightarrow A$, 其中假定 A 很小。然而对于有限数据记录, 统计量稍微有点不同。当然, Rao检验很容易确定, 缺点是它的性能可能不如GLRT在有限数据记录时的性能。

L6.10.WGN中具有未知幅度和方差的DC电平—Rao检验

选择 $\lambda=5$, $\sigma^2=1$,
 $N=10$, $A=\sqrt{5/10}$,
虚线1是理论的渐进性能
虚线2是GLRT的性能,
实线是Rao检验的性能。
可以发现, 甚至对于像
 $N=10$ 这样短的样本, Rao
检验也得到与GLRT相同的
性能, 至少本例是如此。

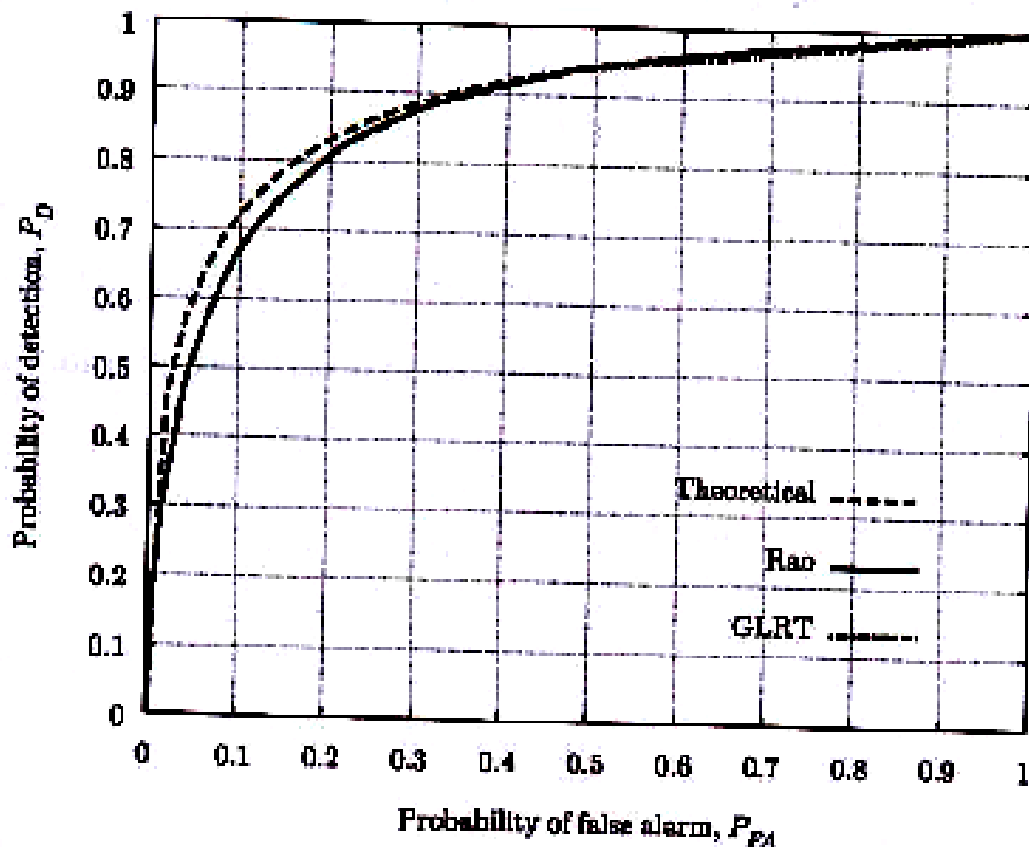


图6.7 渐进等效检验的性能与理论性能的比较



6.7 局部最大势检测器

- 已经注意到，UMP只有在参数检验是单边的时候才存在，即使单边检验得不到UMP检验，也可以求得渐进的UMP检验。
- 假定被检验的参数是一个标量，且没有多余参数，这样的检验称为局部最大势（Locally most powerful, LMP）检验。



6.7 局部最大势检测器

为了说明它的实现，考虑一个没有多余参数的单边参数检验问题，

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta > \theta_0$$

在 H_0 和 H_1 条件下的PDF以 θ 为参数，表示为 $p(x; \theta)$ 。如果我们希望检验靠近 θ_0 的 θ 值，那么LMP检验存在。在信号检测中，这要求规定 θ 是信号的幅度，且假定它的值较小（ $\theta = A$ 和 $\theta_0 = 0$ ）LMP检验约束 P_{FA} ，对所有接近 θ_0 的 θ 值（ $\theta > \theta_0$ ）使 P_D 最大。然而对于偏离 θ_0 较大的 θ 值，不能保证是最佳的。因此应该使用GLRT.

6.7 局部最大势检测器

为了推导LMP检测器，首先考虑NP检验，或者如果

$$\frac{p(x; \theta)}{p(x; \theta_0)} > \gamma, \text{判} H_1. \text{取对数得} \ln p(x; \theta) - \ln p(x; \theta_0) > \ln \gamma$$

假定 $\theta - \theta_0$ 很小，我们使用 $\ln p(x; \theta)$ 在 $\theta = \theta_0$ 处得一阶泰勒展开

$$\ln p(x; \theta) = \ln p(x; \theta_0) + \left. \frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \theta_0} (\theta - \theta_0)$$

因此如果 $\left. \frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \theta_0} (\theta - \theta_0) > \ln \gamma$, 判 H_1 。或者由于 $\theta > \theta_0$

$$\left. \frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \theta_0} > \frac{\ln \gamma}{\theta - \theta_0} = \gamma', \text{判} H_1. \text{乘以因子的统计量为}$$

$$T_{\text{LMP}}(x) = \frac{\left. \frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \theta_0}}{\sqrt{I(\theta_0)}} \text{是LMP检验。使} P_D \text{最大（} \theta = \theta_0 \text{处取得）}$$

是根据在弱信号条件下与NP检验的等效性得出的。

$$T_R(x) = \frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0}^T I^{-1}(\theta_0) \frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} > \gamma \quad (6.31)$$

6.7 局部最大势检测器

对于大数据记录,

$$T_{LMP}(x) \sim \begin{cases} N(0,1), \text{ 在 } H_0 \text{ 条件下} \\ N(\sqrt{I(\theta_0)}(\theta_1 - \theta_0), 1), \text{ 在 } H_1 \text{ 条件下} \end{cases} \quad (6.37)$$

其中 θ_1 是 H_1 条件下 θ 的真实值, $I(\theta_0)$ 是在 θ_0 处计算的 *Fisher* 信息。

注意 $T_{LMP}(x) = \frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \sqrt{I^{-1}(\theta_0)}$ 可以看作是有多

余参数的标量单边 Rao 检验 (参见 6.31 式)。通常的 Rao 检验是双边检验, 需要平方运算。最后我们从 (6.37) 式可以发现 LMP 检验具有通常的均值偏移高斯-高斯检测器的检测性能 (参见第三章), 偏移系数为 $d^2 = (\theta_1 - \theta_0)^2 I(\theta_0)$