检测理论—模型、准则及评价

杨文　　电子信息学院
教学实验大楼十楼1008室
E-mail: yw@eis.whu.edu.cn

内容提要

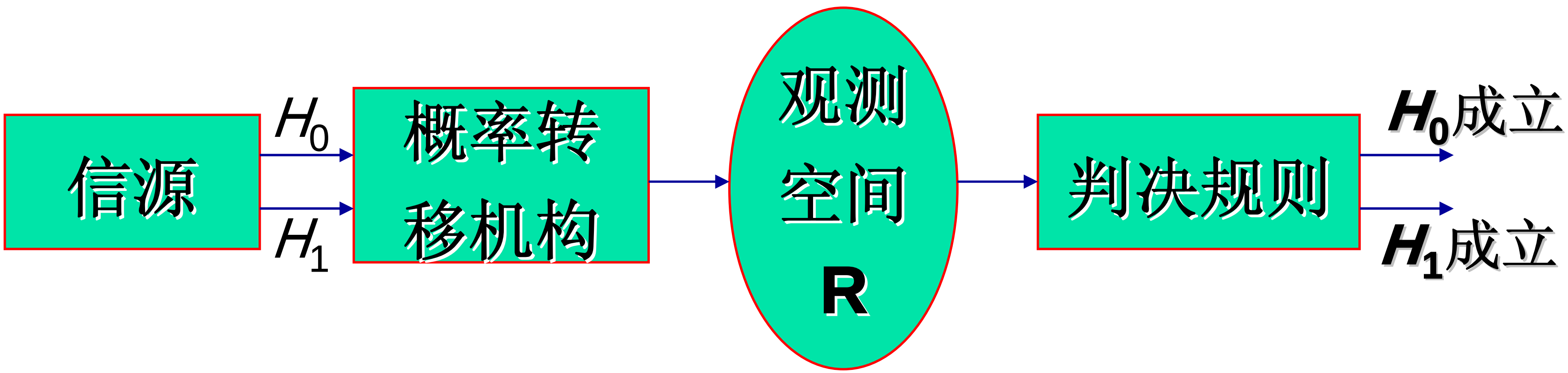
- 信号的统计检测模型
- 信号的统计检测准则
- 信号检测的统计性能
- 信号的序列检测

信号检测与估计

- 信号检测与参量估计
  - 信号检测：根据有限观测，“最佳”区分一个物理系统不同状态的理论
  - 参量估计：根据有限观测，“最佳”找出一个物理系统不同参数的理论
- 信号的统计检测理论主要研究受噪声干扰的随机信号中，信号的有/无或信号属于哪个状态的最佳判决的概念、方法和性能等问题，其数学基础就是统计判决理论，又称假设检验理论。

统计检测理论的基本模型

- 二元信号检测模型

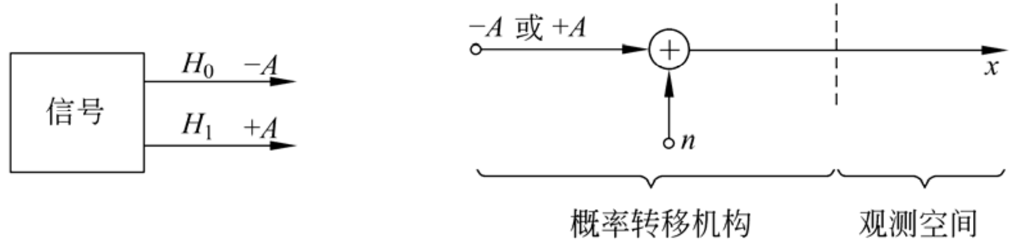


- 信源：全体假设的集合。它输出一种特定的信号。输出是两个假设之一或M个假设之一，分别对应二元信号检测和M元信号检测。

统计检测理论的基本模型

- 二元信号检测模型
  - **概率转移机构**：在信源输出H_i为真的基础上将其按一定的概率关系映射到观测空间。
  - **观测空间*R***:在信源不同输出下，由概率转移机构所形成的可能的观测量的集合。观测量可以是一维的，也可以是*N*维矢量。

二元信号检测统计模型

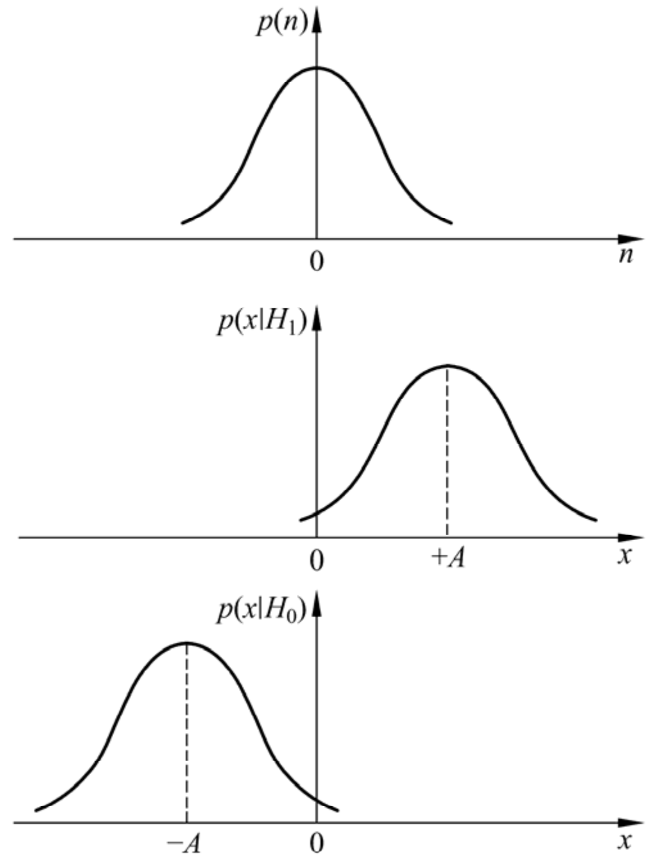


(a) 观测信号生成模型

$$p(n)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

$$p(x|H_1)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

$$p(x|H_0)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{(x+A)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$



(b) 观测信号的概率密度函数

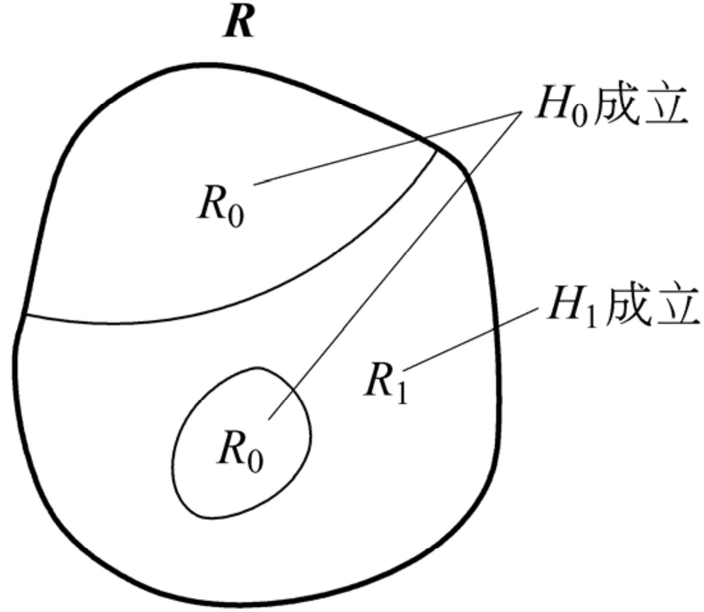
统计检测理论的基本模型

- 二元信号检测模型
  - 判决规则：观测量落入观测空间后，就可以根据判决规则来推断哪一个假设成立是合理的，即判决信号属于哪种状态。
    - 统计判决的任务就是**根据观测量落在观测空间的位置，按照某种检验规则，作出信号状态是属于哪个假设的判决**。实际上是**对观测空间*R*的划分问题**。

统计检测理论的基本模型

- 二元信号检测的判决域

在信号的统计检测问题中，检测准则决定了判决域的划分，而判决域的划分体现了检测准则的性能。根据信号检测的不同应用环境和性能要求，可以采用不同的检测准则，以达到最佳检测。

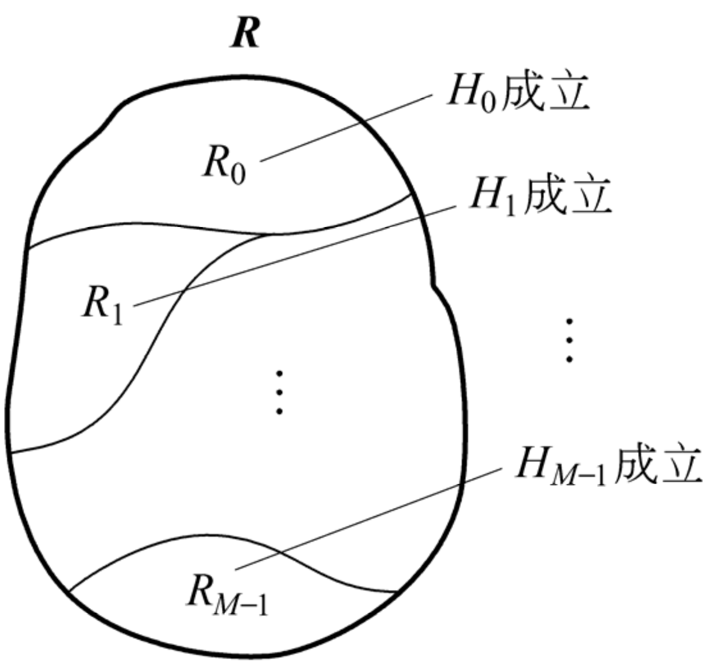


二元信号检测的判决域

统计检测理论的基本模型

- M元信号检测：信号有M种可能的输出信号状态。

判决规则： 将整个观测空间R划分成 $\bigcup_{i=0}^{M-1} R_i = R$， $R_i \cap R_{j,i\neq j} = \varnothing$，子空间$R_i$就是判决$H_i$成立的判决域。



M元信号检测的判决域

统计检测的结果和判决概率

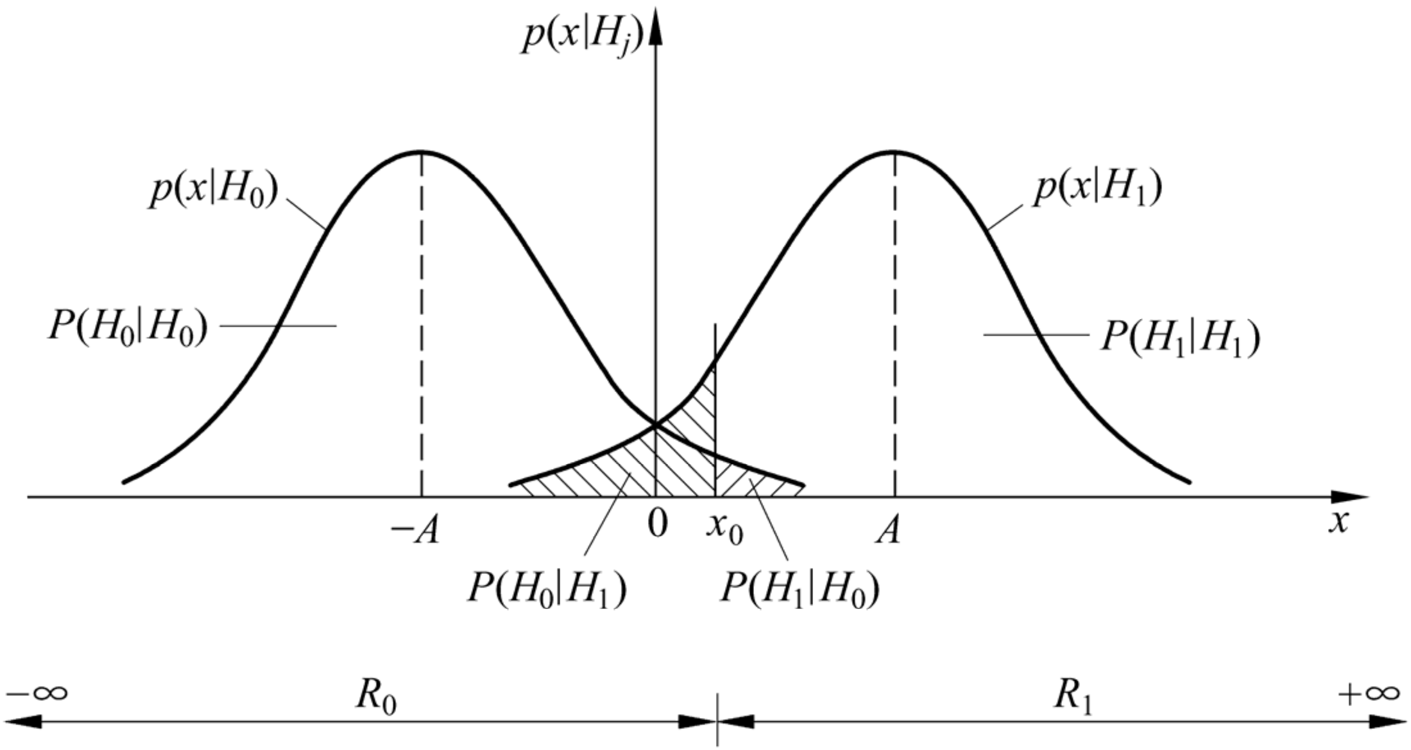
表 3.2.1　二元信号判决结果

判决	假　　设	
	H_0	H_1
H_0	$(H_0 \mid H_0)$	$(H_0 \mid H_1)$
H_1	$(H_1 \mid H_0)$	$(H_1 \mid H_1)$

表 3.2.2　二元信号判决概率

判决	假　　设	
	H_0	H_1
H_0	$P(H_0 \mid H_0)$	$P(H_0 \mid H_1)$
H_1	$P(H_1 \mid H_0)$	$P(H_1 \mid H_1)$

统计检测的结果和判决概率



二元信号检测的判决域划分与判决概率

统计检测的结果和判决概率

- M元信号统计检测的结果和判决概率

当假设H_j为真时，判决H_i成立的结果为$(H_i \mid H_j)$ $(i, j = 0, 1, \cdots, M-1)$, 共有$M^2$种判决结果，其中$M$种是正确判决的结果，$M(M-1)$种是错误判决的结果。对应于每种判决结果有相应的判决概率$P(H_i \mid H_j)$, 可以表示为

$$P(H_i \mid H_j) = \int_{R_i} p(\mathbf{x} \mid H_j) d\mathbf{x}, i, j = 0, 1, \cdots, M-1$$

综上所述，为了获得某种意义上的最佳信号检测结果，应正确划分观测空间*R*中的各个判决域$\boldsymbol{R}_\mathbf{i}$，而判决域的划分与采用的最佳检测准则密切相关。

判决准则

- 贝叶斯准则
- 派生贝叶斯准则
  - 最小平均错误概率准则
  - 最大后验概率准则
  - 极小化极大准则
  - 纽曼－皮尔逊准则

贝叶斯准则

- 贝叶斯准则：在假设H_j的先验概率$P(H_j)$已知，各种判决代价因子C_{ij}给定的情况下，使平均代价C最小。
- 代价因子C_{ij}表示假设H_j为真时，判决假设H_i成立所付出的代价。为具一般性，正确判决假定也付出代价，但满足

$$C_{10}>C_{00}, C_{01}>C_{11}$$

贝叶斯准则

平均代价C：判决概率$P(H_i|H_j)$，先验概率$P(H_j)$，代价因子C_{ij}

$$C(H_j)=\sum_{i=0}^{1}C_{ij}P(H_i|H_j),\ j=0,1$$

$$P(H_i|H_j)=\int_{R_1}p(\mathbf{x}|H_j)d\mathbf{x}$$

$$\int_{R}p(\mathbf{x}|H_j)d\mathbf{x}=1$$

$$C=P(H_0)C(H_0)+P(H_1)C(H_1)=\sum_{j=0}^{1}\sum_{i=0}^{1}C_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j)$$

$$C=C_{10}P(H_0)+C_{11}P(H_1)+\int_{R_0}[(P(H_1)(C_{01}-C_{11})p(\mathbf{x}|H_1))-$$

$$(P(H_0)(C_{10}-C_{00})p(\mathbf{x}|H_0))]d\mathbf{x}$$

固定平均代价的分量，与判决域的划分无关，不影响平均代价C的极小化

判决表示式

$$C=\boxed{C_{10}P(H_0)+C_{11}P(H_1)}+\int_{R_0}[(P(H_1)(C_{01}-C_{11})p(\mathbf{x}|H_1))-(P(H_0)(C_{10}-C_{00})p(\mathbf{x}|H_0))]d\mathbf{x}$$

$$\boxed{[(P(H_1)(C_{01}-C_{11})p(\mathbf{x}|H_1))-(P(H_0)(C_{10}-C_{00})p(\mathbf{x}|H_0))]}$$

该积分项是平均代价的可变部分，它的正负受到积分域R_0的控制。根据贝叶斯准则，应使平均代价C最小。为此，把凡是使被积函数取负值的x值划分给R_0域，而把其余的x值划分给R_1域，以保证平均代价最小。对于使被积函数为零的那些x值，由于不影响平均代价，统一起见，这样的x值都划分给R_1域。

$$\boxed{[(P(H_1)(C_{01}-C_{11})p(\mathbf{x}|H_1))-(P(H_0)(C_{10}-C_{00})p(\mathbf{x}|H_0))]}$$

判决表示式

H_0成立的判决域R_0可以这样确定：即满足下式的**x**值

$$\boxed{P(H_1)(C_{01}-C_{11})p(\mathbf{x}|H_1)<P(H_0)(C_{10}-C_{00})p(\mathbf{x}|H_0)}$$

对上式进行改写得到

$$\boxed{\frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{P(H_1)(C_{01}-C_{11})}}$$

$$\boxed{\lambda(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)}}$$

似然比函数

Likelihood ratio function

$$\boxed{\frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{P(H_1)(C_{01}-C_{11})} \overset{def}{=} \eta}$$

似然比检测门限

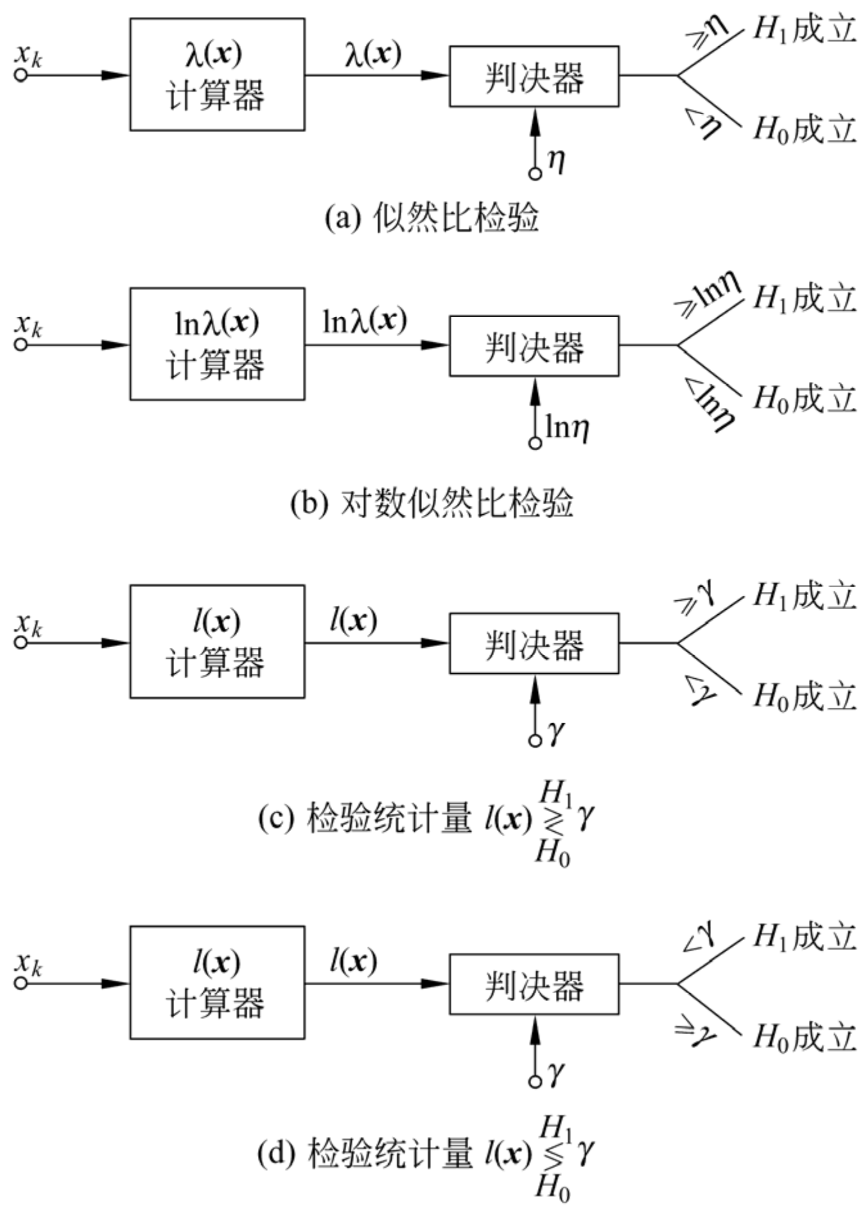
Likelihood ratio detection threshold

判决表达式

由贝叶斯准则得到的似然比检验（**Likelihood ratio test**）为：

$$\lambda(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

似然比函数 $\lambda(\mathrm{x})$ 是观测量 **(x|H$_1$)** 和 **(x|H$_0$)** 的统计描述—概率密度函数 **p(x|H$_1$)** 和 **p(x|H$_0$)** 的比值。似然比门限 η 使检测性能—平均代价 *C* 达到最小。



二元信号检测原理框图

检测性能分析

- 贝叶斯准则是使平均代价C最小的信号检测准则，因此平均代价C是贝叶斯准则的性能指标。

$$C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1) = \sum_{j=0}^{1}\sum_{i=0}^{1} C_{ij} P(H_j) P(H_i \mid H_j)$$

- 根据上式求出评价代价C,从而可对检测的性能进行评价，并提出改善检测性能的措施。

派生贝叶斯准则

- 贝叶斯准则是信号统计检测理论中的通用检测准则。在对各假设的先验概率和各种判决的代价因子作某些约束的情况下，可导出它的派生准则。
  - 最小平均错误概率准则
  - 最大后验概率准则
  - 极小化极大准则
  - 纽曼—皮尔逊准则

$$C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1) = \sum_{j=0}^{1}\sum_{i=0}^{1} C_{ij}P(H_j)P(H_i \mid H_j)$$

最小平均错误概率准则

- 在通信系统里，通常有 $C_{00} = C_{11} = 0, C_{10} = C_{01} = 1$ 即正确判决不付出代价，错误判决代价相同。此时有

$$C = P(H_0)P(H_1 \mid H_0) + P(H_1)P(H_0 \mid H_1)$$

$$P_e = P(H_0)P(H_1 \mid H_0) + P(H_1)P(H_0 \mid H_1)$$

- 使平均错误概率最小的准则称为最小平均错误概率准则（Minimum mean probability of error criterion）

最小平均错误概率准则

$$P_e = P(H_0)P(H_1 | H_0) + P(H_1)P(H_0 | H_1)$$

$$= P(H_0)\int_{R_1} p(\mathbf{x} | H_0)d\mathbf{x} + P(H_1)\int_{R_0} p(\mathbf{x} | H_1)d\mathbf{x}$$

$$= P(H_0) + \int_{R_0} \left[P(H_1)p(\mathbf{x} | H_1) - P(H_0)p(\mathbf{x} | H_0)\right]d\mathbf{x}$$

为了使P_e最小，将所有满足$P(H_1)p(\mathbf{x} | H_1) < P(H_0)p(\mathbf{x} | H_0)$的$\mathbf{x}$值划归$R_0$域，判决假设$H_0$成立；而把其他的$\mathbf{x}$值划归$R_1$域，判决假设$H_1$成立。于是得最小错误概率准则的判决表达式为

$$P(H_1)p(\mathbf{x} | H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(H_0)p(\mathbf{x} | H_0)$$

最小平均错误概率准则

$$\lambda(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \frac{p(\mathbf{x}\mid H_1)}{p(\mathbf{x}\mid H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = \eta$$

$$\ln \lambda(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \eta$$

$$l(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma \quad \text{or} \quad l(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

最大似然准则

等先验概率下的最小平均错误概率准则称为最大似然准则(maximum likelihood criterion)

$$\lambda(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

$$p(\mathbf{x}|H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(\mathbf{x}|H_0)$$

最大后验准则

在贝叶斯准则中，当代价因子满足

$$C_{10}-C_{00}=C_{01}-C_{11}$$

时，判决表示式便成为

$$\lambda(\mathbf{x})=\frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \quad\Rightarrow\quad p(\mathbf{x}|H_1)P(H_1)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}P(H_0)p(\mathbf{x}|H_0)$$

$$P(H_0)p(\mathbf{x}|H_0)=p(\mathbf{x})P(H_0|\mathbf{x})$$
$$P(H_1)p(\mathbf{x}|H_1)=p(\mathbf{x})P(H_1|\mathbf{x})$$

$$\Rightarrow\quad p(\mathbf{x})p(H_1|\mathbf{x})\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}p(\mathbf{x})p(H_0|\mathbf{x})$$

最大后验准则

$$p(H_1|\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(H_0|\mathbf{x})$$

在已经获得观测量**x**的条件下，假设H_1和假设H_0为真的概率，称为后概概率。

最大后验概率准则（Maximum a posteriori probability criterion）

极小化极大准则

- 极小化极大准则(Minimax criterion)是在已经给定代价因子C_{ij}，但无法确定先验概率$P(H_j)$的条件下的一种信号检测准则。
- 该准则的含义是，在上述条件下可以避免可能产生的过分大的代价，使极大可能代价极小化—**极小化极大准则**。

$$C = C_{10}P(H_0) + C_{11}P(H_1) + \int_{R_0} [(P(H_1)(C_{01} - C_{11})p(\mathbf{x}|H_1)) - (P(H_0)(C_{10} - C_{00})p(\mathbf{x}|H_0))]d\mathbf{x}$$

极小化极大准则

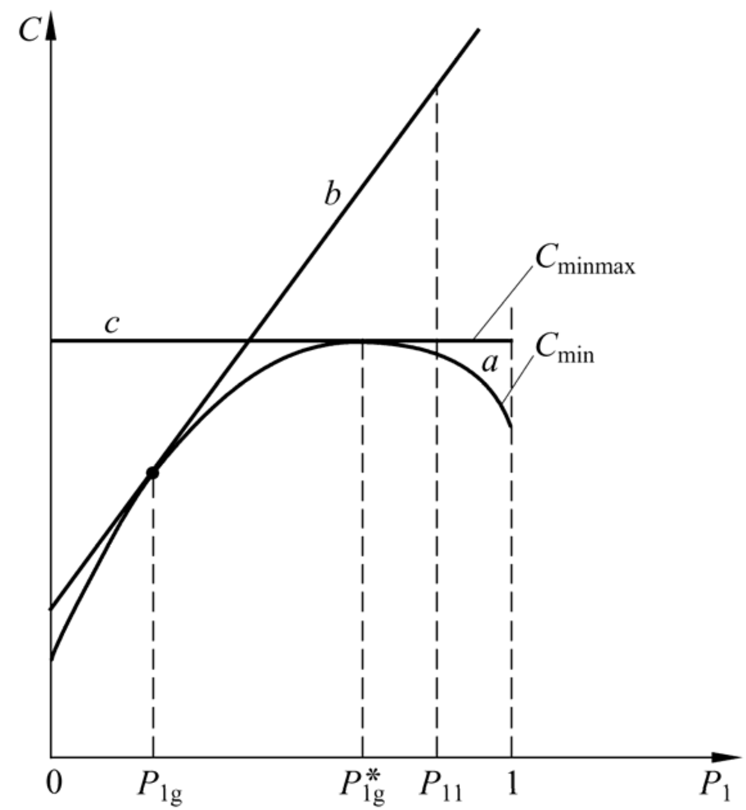
$$P_F \overset{def}{=} P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_0)d\mathbf{x} = 1 - \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_0)d\mathbf{x}$$

$$P_M \overset{def}{=} P(H_0|H_1) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_1)d\mathbf{x}$$

$$P_1 \overset{def}{=} P(H_1) = 1 - P(H_0) \overset{def}{=} 1 - P_0$$

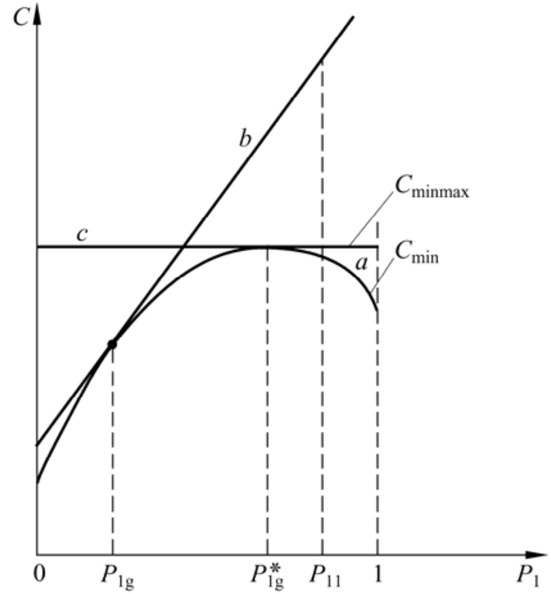
$$C(P_1) = C_{10}(1-P_1) + C_{11}P_1 + P_1(C_{01} - C_{11})P_F(P_1)$$
$$-(1-P_1)(C_{10} - C_{00})[1 - P_F(P_1)]$$
$$= C_{00} + (C_{10} - C_{00})P_F(P_1) + P_1[(C_{11} - C_{00})$$
$$+ (C_{01} - C_{11})P_M(P_1) + (C_{10} - C_{00})P_F(P_1)$$

一般情况下，C_{min}对P_1的曲线具有上凸的形状。当似然比函数是严格单调的概率分布随机变量时，贝叶斯平均代价是P_1的严格上凸函数，如右图曲线*a*



平均代价C与P_1的关系曲线

极小化极大准则

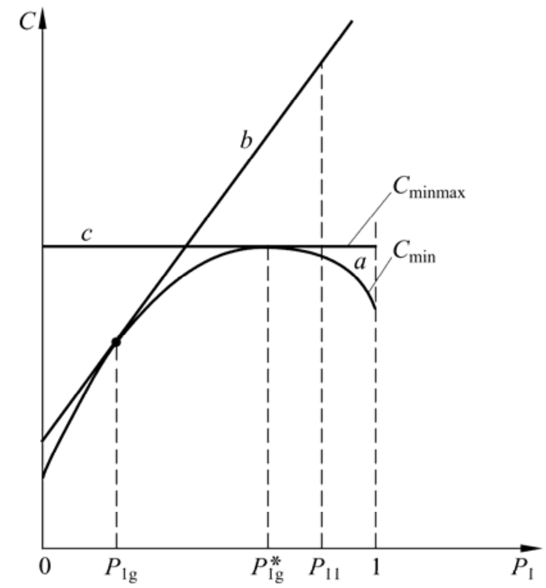


平均代价C与P_1的关系曲线

如果先验概率P_1未知，为了使用贝叶斯准则只能猜测一个先验概率P_{1g}，然后用它来确定贝叶斯准则的似然比检测门限$\eta=\eta(P_{1g})$。此时的$P_F(P_{1g})$和$P_M(P_{1g})$都是P_{1g}的函数。一旦P_{1g}猜定后，$P_F(P_{1g})$和$P_M(P_{1g})$就确定了。此时，平均代价与实际的先验概率P_1的关系将是一条直线，用$C(P_1,P_{1g})$表示：

$$\begin{aligned}C(P_1,\ P_{1g})=C_{00}+(C_{10}-C_{00})P_F(P_{1g})+P_1[(C_{11}-C_{00})\\+(C_{01}-C_{11})P_M(P_{1g})+(C_{10}-C_{00})P_F(P_{1g})]\end{aligned}$$

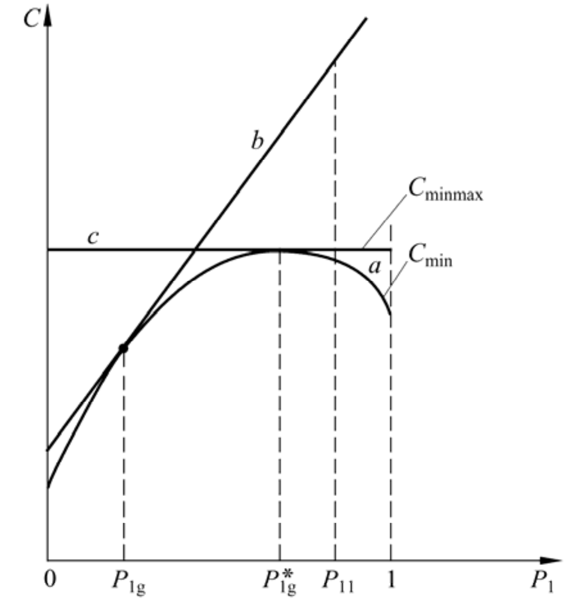
极小化极大准则



平均代价C与P_1的关系曲线

当$P_{1g}=P_1$时，即猜测的先验概率P_{1g}恰好等于实际的先验概率P_1时，平均代价最小，即为贝叶斯平均代价，所以$C(P_1,P_{1g})$是一条与曲线a相切的直线，切点在$C(P_1=P_{1g},P_{1g})$处，如图中直线b所示。当实际的P_1不等于猜测的P_{1g}时，$C(P_1,P_{1g})$将大于贝叶斯平均代价$C_{\min}$，而且对于某些可能的P_1值，如P_{11}，实际的平均代价将远大于最小平均代价，如图所示。

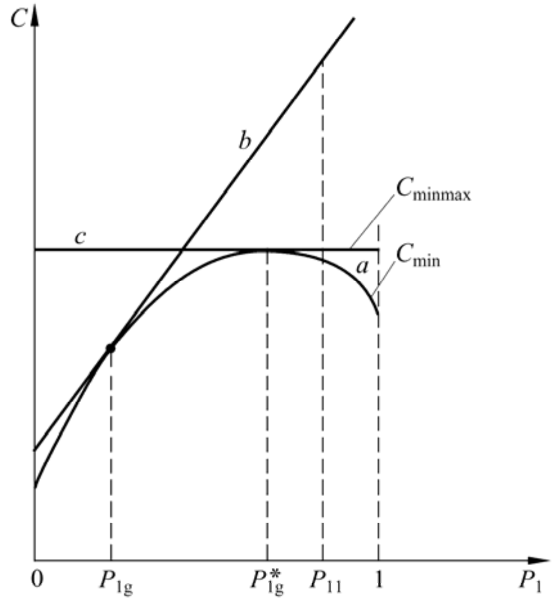
极小化极大准则



平均代价C与P_1的关系曲线

为避免产生上述过分大的代价，人们猜测先验概率当$P_{1g}^* = P_1$时，使该点处的$C(P_1, P_{1g}^*)$是一条与$C_{\min}$水平相切的直线，如图中水平切线c。虽然该处贝叶斯准则的最小平均代价最大，为$C_{\min\max}$，但是可以使由于未知先验概率P_1而可能产生的极大平均代价极小化，即如果猜测先验概率为P_{1g}^*时，那么无论实际的先验概率P_1为多大，平均代价都等于$C_{\min\max}$，而不会产生过分大的代价。

极小化极大准则



平均代价C与P$_1$的关系曲线

为求出极小化极大准则应满足的条件，即为了求得P_{1g}^*，

$$\left.\frac{\partial C(P_1, P_{1g})}{\partial P_1}\right|_{P_{1g}=P_{1g}^*} = 0$$

从而得到

$$(C_{11}-C_{00})+(C_{01}-C_{11})P_M(P_{1g}^*)-(C_{10}-C_{00})P_F(P_{1g}^*)=0$$

此即为极小化极大准则的极小化极大方程。解此方程即可得P_{1g}^*和似然比检测门限η^*。此时的平均代价为

$$C(P_{1g}^*)=C_{00}+(C_{10}-C_{00})P_F(P_{1g}^*)$$

极小化极大准则

如果代价因子$C_{00}=C_{11}=0$,则极小极大方程为

$$C_{01}P_M(P_{1g}^*)-C_{10}P_F(P_{1g}^*)=0$$

此时平均代价为

$$C(P_{1g}^*)=C_{10}P_F(P_{1g}^*)$$

进一步，如果$C_{00}=C_{11}=0,C_{01}=C_{10}=1$，则有

$$P_M(P_{1g}^*)=P_F(P_{1g}^*)$$

并且，极小化极大代价就是平均错误概率$P_F(P_{1g}^*)$。

纽曼－皮尔逊准则

- 采用贝叶斯准则需要知道各假设的先验概率，并对每种可能的判决给定代价因子；如果不知道先验概率，可采用极小化极大准则；在有些情况下，如雷达信号检测，两者都不知道，这种情况下怎么办？

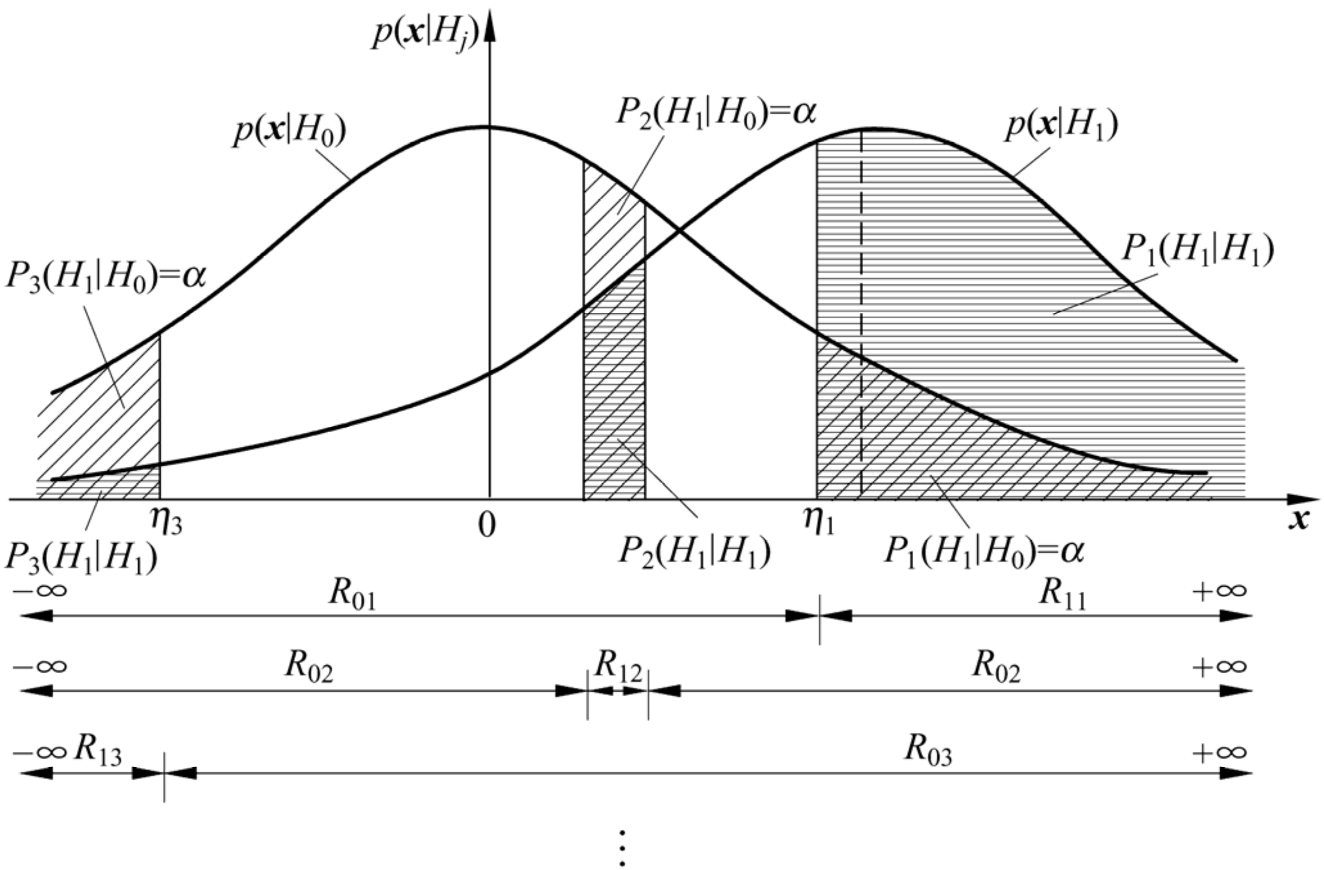
纽曼－皮尔逊准则

- 为适应上述情况，并考虑到人们最关心的是判决概率$P(H_1|H_0)$和 $P(H_1|H_1)$，当然希望错误判决概率$P(H_1|H_0)$尽可能的小，而正确判决概率$P(H_1|H_1)$尽可能的大。但是在信噪比一定的情况下，增大$P(H_1|H_1)$，必然会导致$P(H_1|H_0)$随之增大。
- 纽曼－皮尔逊准则：在错误判决概率$P(H_1|H_0)=a$的约束条件下，使正确判决概率$P(H_1|H_1)$最大的准则。(Neyman-Pearson Criterion,N-P)

纽曼－皮尔逊准则

- 纽曼－皮尔逊准则特别适合于雷达、声纳等信号的检测问题。在这类信息系统中，错误判决概率$P(H_1|H_0)$是虚警概率P_F，而正确判决概率$P(H_1|H_1)$是检测概率P_D。
- 为了保证信息处理系统能有效地处理有用的数据，通常**对虚警概率的大小提出一个约束值*a***，以免过多的虚假数据进入信息处理系统而影响其工作效率，同时要求有用的数据经可能的没有丢失地进入信息处理系统，即要求**正确的检测概率P_D最大**。

纽曼—皮尔逊准则



纽曼·皮尔逊准则概念性说明示意图

纽曼—皮尔逊准则

为求出纽曼—皮尔逊准则的判决式，需在$P(H_1 | H_0) = a$的约束下，设计使得$P(H_1 | H_1)$最大，即使得$P(H_0 | H_1) = 1 - P(H_1 | H_1)$最小的检验。利用拉格朗日乘子法（$\mu \geq 0$），构造目标函数

$$J = P(H_0 | H_1) + \mu[P(H_1 | H_0) - a]$$

$$= \int_{R_0} p(\mathbf{x} | H_1) d\mathbf{x} + \mu\left[\int_{R_1} p(\mathbf{x} | H_0) d\mathbf{x} - a\right]$$

显然，若$P(H_1 | H_0) = a$，则J达到最小，即$P(H_0 | H_1)$最小。

纽曼－皮尔逊准则

变换积分域得

$$J=\mu(1-a)+\int_{R_0}\left[p(\mathbf{x}\,|\,H_1)-\mu p(\mathbf{x}\,|\,H_0)\right]d\mathbf{x}$$

第一项非负，只需把被积分项为负的**x**值划分给R_0，判决H_0成立即可，否则划归R_1域，判决H_1成立，即

$$p(\mathbf{x}\,|\,H_1)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\mu p(\mathbf{x}\,|\,H_0)$$

纽曼—皮尔逊准则

写成似然比检验的形式

$$\lambda(\mathbf{x})=\frac{p(\mathbf{x}\mid H_1)}{p(\mathbf{x}\mid H_0)}\ \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ \mu$$

为了满足$P(H_1\mid H_0)=a$的约束，选择μ使

$$P(H_1\mid H_0)=\int_{R_1} p(\mathbf{x}\mid H_0)d\mathbf{x}=\int_{\mu}^{\infty} p(\lambda\mid H_0)d\lambda=a$$

对于给定的a，μ可由上式解出。

$$\boxed{P(H_1|H_0)=\int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_0)d\mathbf{x}=\int_{\mu}^{\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda=a}$$

纽曼－皮尔逊准则

$$\begin{cases} P(H_1|H_1)=\int_{\mu}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda \\ P(H_0|H_1)=\int_{0}^{\mu} p(\lambda|H_1)d\lambda \end{cases}$$

$$\mu\uparrow, P(H_1|H_0)\downarrow, P(H_0|H_1)\uparrow;$$

$$\mu\downarrow, P(H_1|H_0)\uparrow, P(H_0|H_1)\downarrow;$$

可见，改变μ的大小，就可以调节判决域R_0和R_1。

在贝叶斯准则中，令

$P(H_1)(C_{01}-C_{11})=1, P(H_0)(C_{10}-C_{00})=\mu$,就变成了纽曼－皮尔逊准则

信号统计检测的性能

- 从前面的讨论可以看出，不同准则的“最佳”性能指标，都与判决概率$P(H_1|H_0)$和$P(H_1|H_1)$ 有关。
- 似然比检验化简后，结果的一般形式为

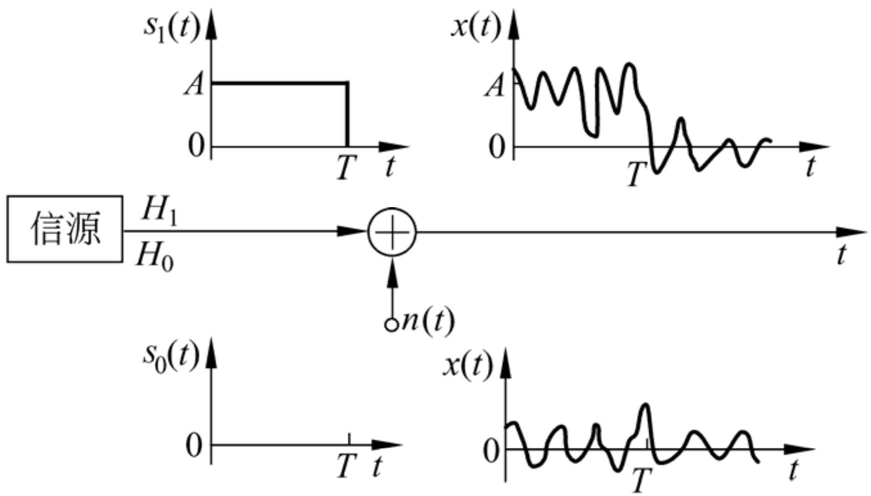
$$l(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma \quad or \quad l(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\lessgtr}} \gamma$$

$$\begin{cases} P(H_1 | H_0) = \int_{\gamma}^{\infty} p(l | H_0) dl \\ P(H_1 | H_1) = \int_{\gamma}^{\infty} p(l | H_1) dl \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} P(H_1 | H_0) = \int_{-\infty}^{\gamma} p(l | H_0) dl \\ P(H_1 | H_1) = \int_{-\infty}^{\gamma} p(l | H_1) dl \end{cases}$$

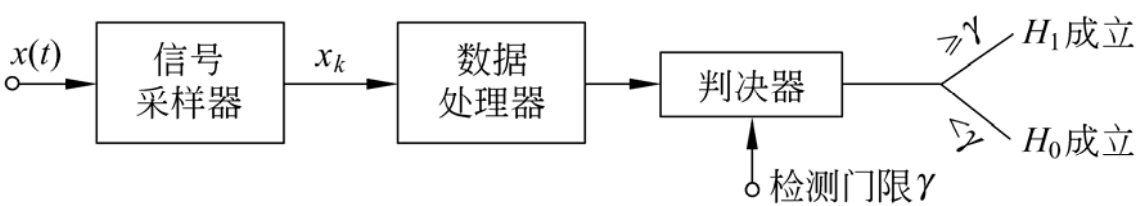
信号统计检测的性能

- 例1.在二元数字通信系统中，假设为H_1时，信源输出常值正电压A,假设为H_0时，信源输出为零电平；信号在通信信道传输过程中叠加了高斯噪声$n(t)$;每种信号的持续时间为$(0,T)$;在接收端对接收到的信号$x(t)$在$(0,T)$内进行N次独立采样，样本为$x_k(k=1, \ldots,N)$,噪声n_k是均值为零，方差为σ_n^2的高斯噪声。

信号统计检测的性能



(a) 通信系统信号模型



(b) 检测系统原理框图

二元信号检测系统模型

信号统计检测的性能

H_0:x_k=n_k,k=1,2, …N

H_1:x_k=A+n_k,k=1,2, …N

N次采样，各样本独立，两种假设下N维观测矢量的PDF为

$$p(\mathbf{x}\,|\,H_0)=\prod_{k=1}^{N}p(x_k\,|\,H_0)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{N/2}\exp\left(-\sum_{k=1}^{N}\frac{x_k^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p(\mathbf{x}\,|\,H_1)=\prod_{k=1}^{N}p(x_k\,|\,H_1)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{N/2}\exp\left(-\sum_{k=1}^{N}\frac{(x_k-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$\lambda(\mathbf{x})=\frac{p(\mathbf{x}\,|\,H_1)}{p(\mathbf{x}\,|\,H_0)}=\exp\left(\frac{A}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{N}x_k-\frac{NA^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$\lambda(\mathbf{x})=\frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)}=\exp\left(\frac{A}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{N}x_k-\frac{NA^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

信号统计检测的性能

$$\exp\left(\frac{A}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{N}x_k-\frac{NA^2}{2\sigma_n^2}\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

两边取自然对数，移项化简得：

$$l(\mathbf{x})\overset{def}{=}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{\sigma_n^2}{NA}\ln\eta+\frac{A}{2}\overset{def}{=}\gamma$$

检验统计量

$$l(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2}{NA}\ln\eta + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

信号统计检测的性能

在假设H_0下和假设H_1下，$l(\mathbf{x})$均服从高斯分布，

$$l(\mathbf{x}\,|\,H_0) \sim N(0,\tfrac{1}{N}\sigma_n^2) \quad l(\mathbf{x}\,|\,H_1) \sim N(A,\tfrac{1}{N}\sigma_n^2)$$

相应的判决概率为：

$$P(H_1\,|\,H_0) = Q[\ln\eta/d + d/2]$$

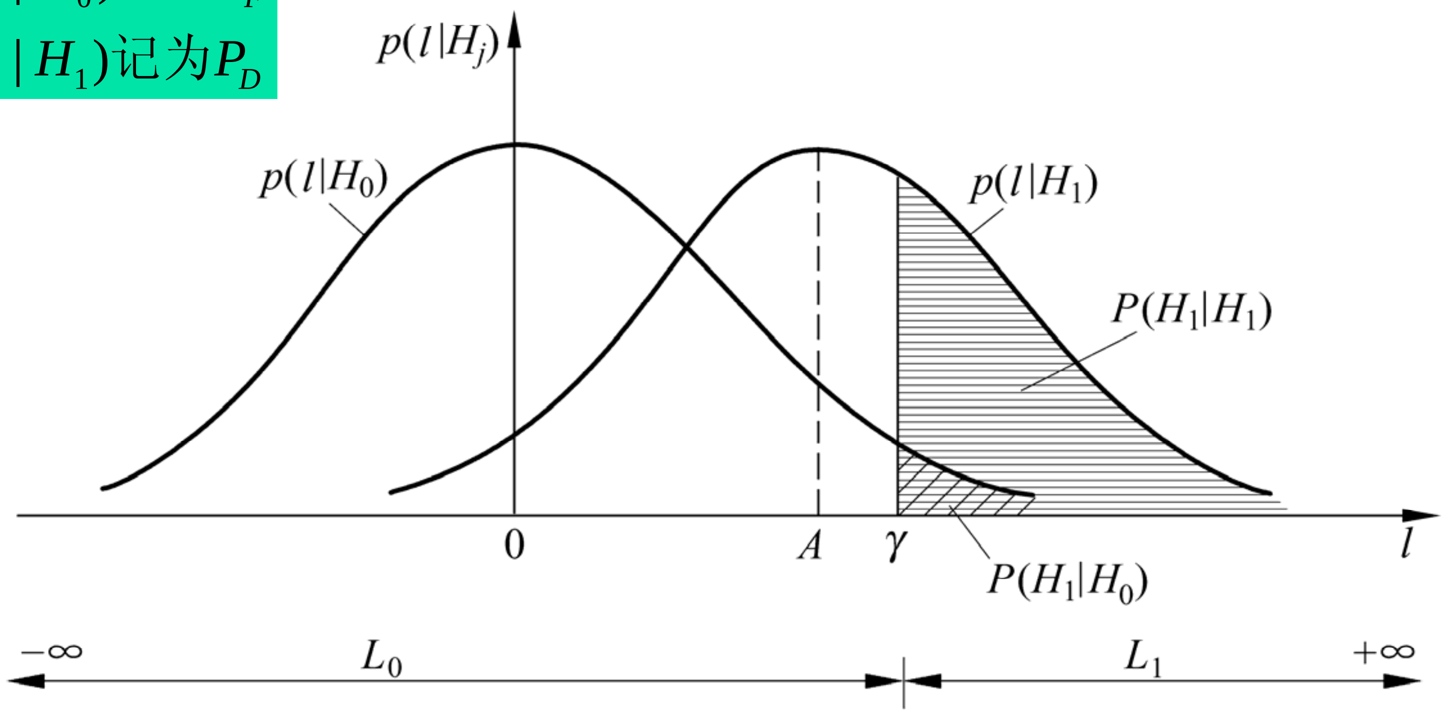
$$P(H_1\,|\,H_1) = Q[\ln\eta/d - d/2] = Q[Q^{-1}(P(H_1\,|\,H_0)) - d]$$

这里，$d^2 = \dfrac{NA^2}{\sigma_n^2}$是功率信噪比，$d = \dfrac{\sqrt{N}A}{\sigma_n}$是幅度信噪比

信号统计检测的性能

$P(H_1 | H_0)$记为P_F

$P(H_1 | H_1)$记为P_D



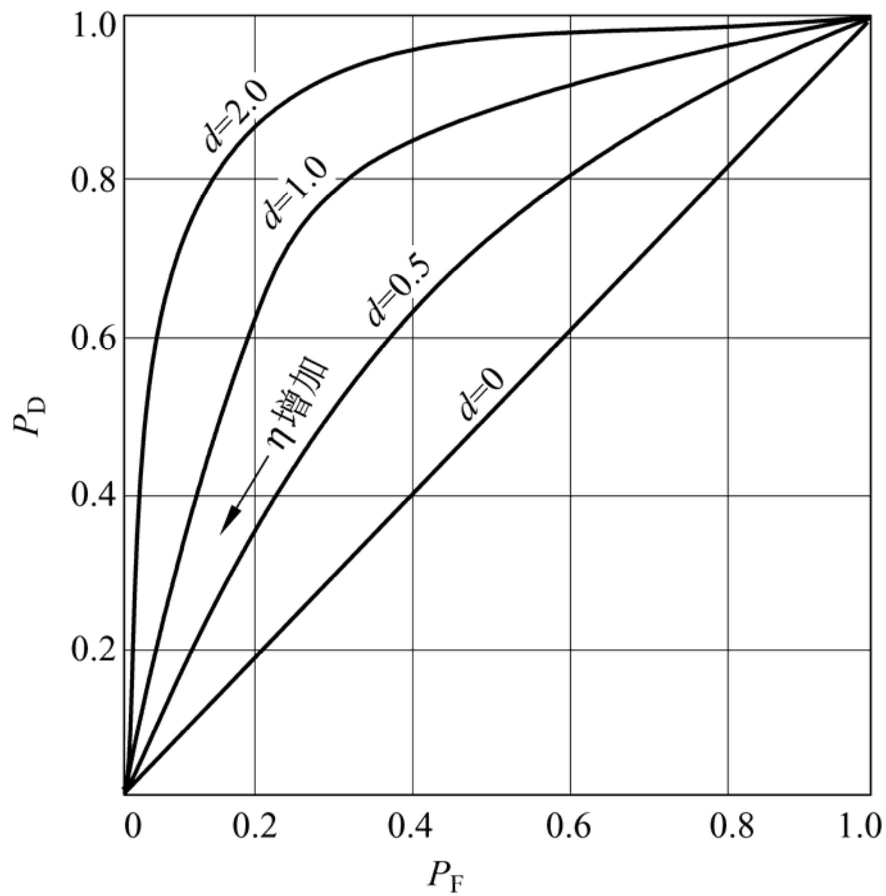
判决概率P（H_1|H_0）和P（H_1|H_1）示意图

信号统计检测的性能

利用参数η，d把P_F，P_D联系起来，绘制$P_F \sim P_D$曲线。

1. 不同的信噪比d对应不同的曲线，但都经过$(P_F, P_D)=(0,0)$和$(P_F, P_D)=(1,1)$两点，分别对应检测门限$\eta=+\infty$和$\eta=0$时的判决概率。

2. 如果似然比函数$\lambda(\mathbf{x})$是连续随机变量，随着η增大，这两种判决概率都会减小。



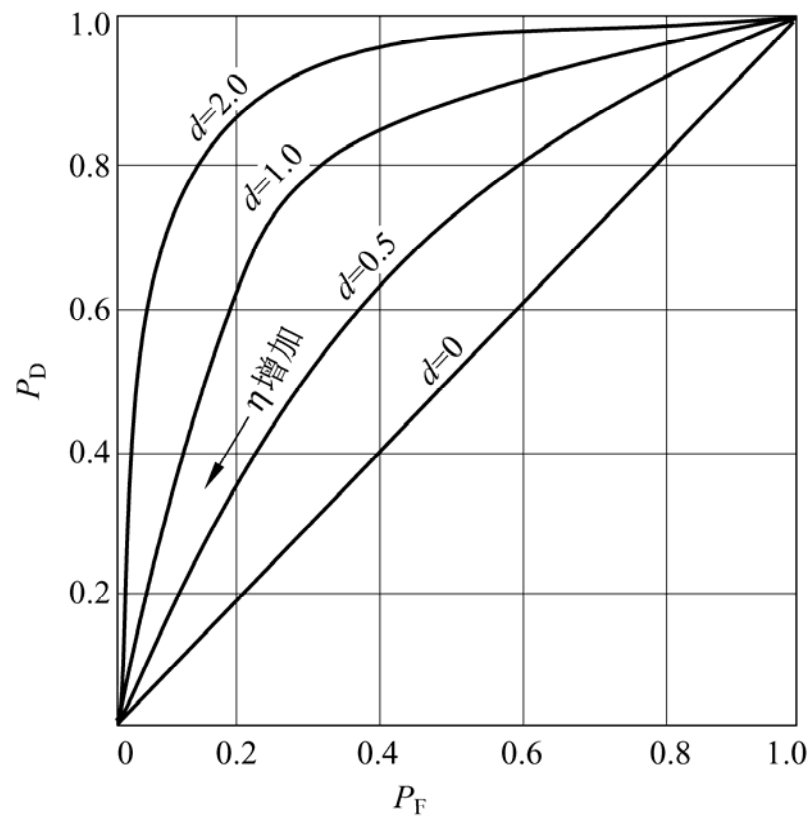
接收机工作特性（ROC）

信号统计检测的性能

3. 当信噪比d取不同值时，$P_F \sim P_D$ 曲线都经过$(0,0)$和$(1,1)$两点且位于直线$P_F = P_D(d=0)$左上方的上凸曲线，d越大，曲线位置越高。

这些曲线反映了P_F和P_D与检测门限η和信噪比d的关系，并描述了信号统计检测的性能，通常称为接收机的工作特性。

Receiver operating characteristic, ROC

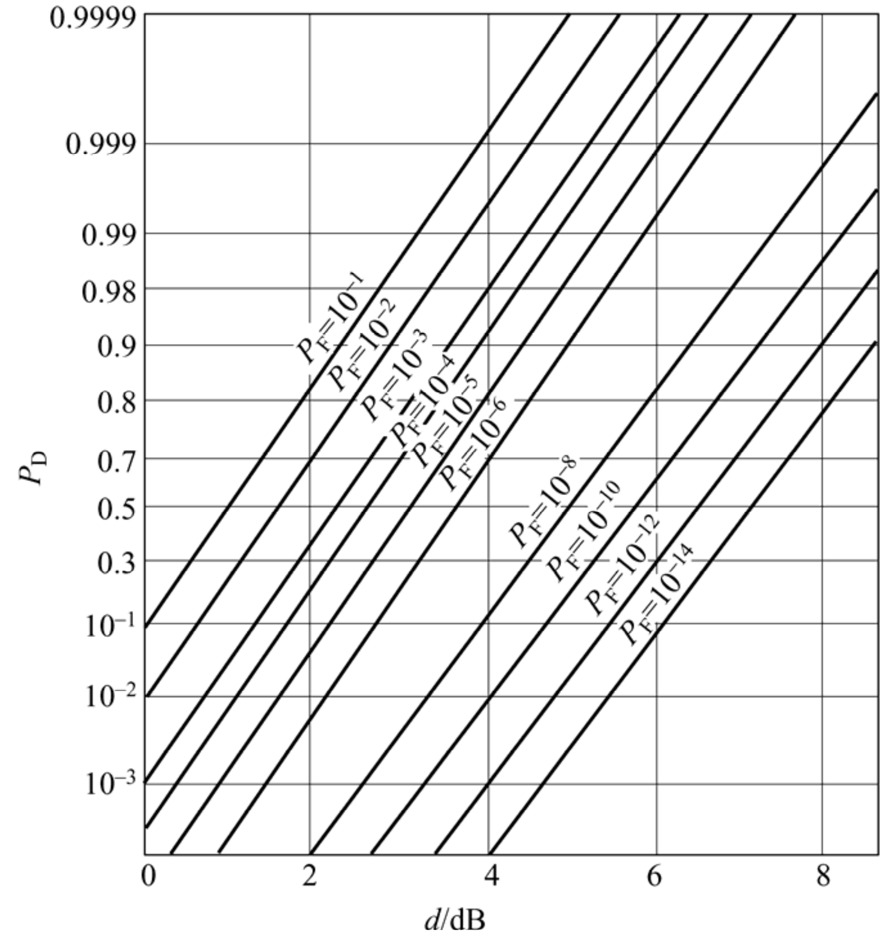


接收机工作特性（**ROC**）

信号统计检测的性能

信噪比d在信号检测中占有非常重要的地位，是接收机的主要技术指标之一。

工作中有时将接收机工作特性改画成$P_D \sim d$曲线，而以P_F作参变量。如右图



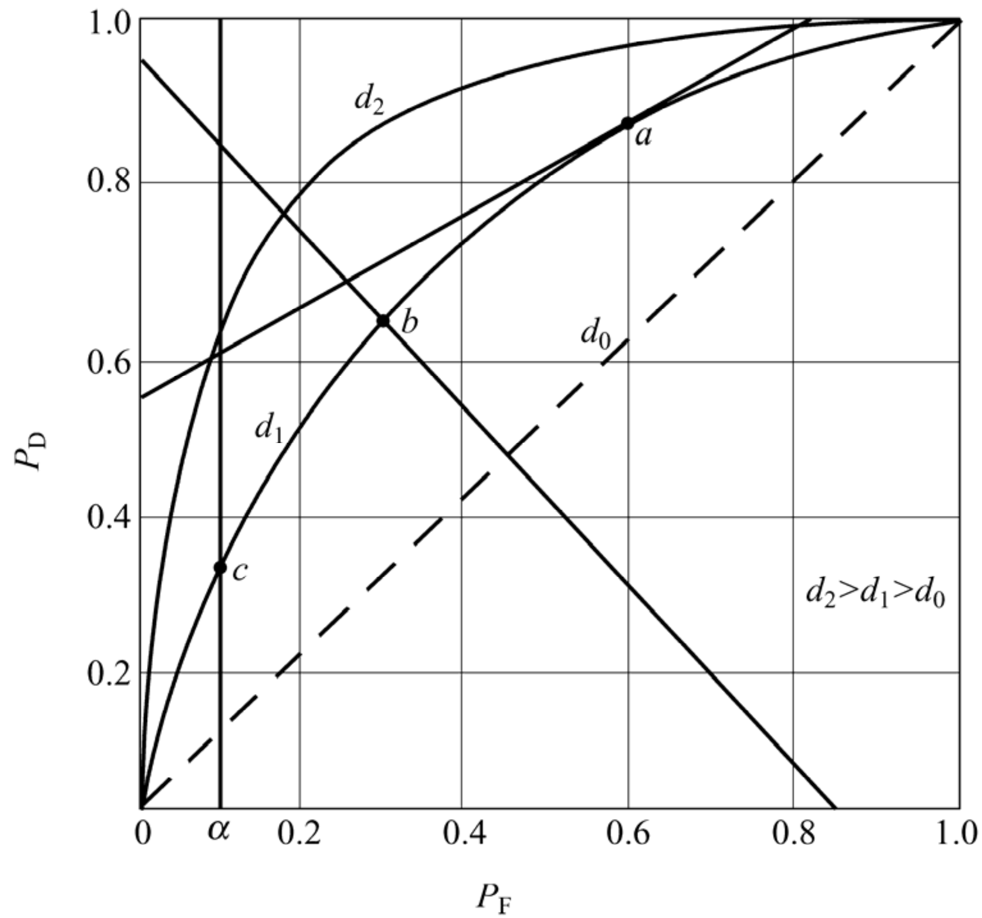
检测概率P_D与信噪比d的关系

信号统计检测的性能

- 虽然在不同的问题中，观测空间中的随机观测量x的统计特性$p(x\,|H_j)$会有所不同，但接收机的工作特性却总是有大致相同的形状，如果似然比函数是x的连续函数，则接收机有如下共同特点：
  - 所有连续似然比检验的接收机工作特性都是上凸的；
  - 所有连续似然比检验的接收机工作特性均位于对角线$P_F=P_D$之上；
  - 接收机工作特性在某点处的斜率等于该点上P_F和P_D所要求的检测门限值η。
- 总之，**检测系统的接收机工作特性可用于各种准则的分析和计算，它描述了似然比检验的性能**。

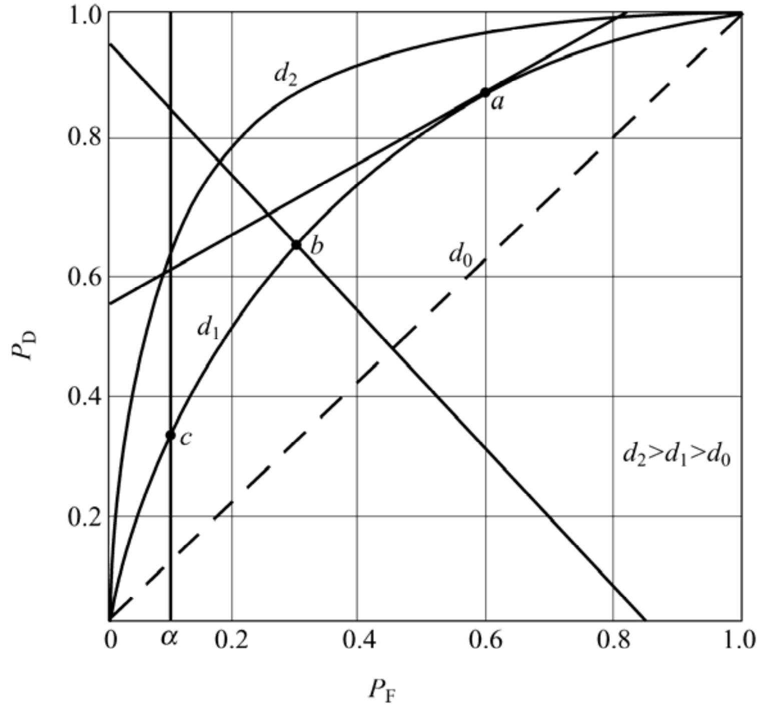
信号统计检测的性能

1.在贝叶斯准则下，最小平均错误概率准则下，先根据先验知识求出似然比检测门限η，以η为斜率的直线与信噪比d的曲线相切，如$d=d_1$时切点为a，该切点所对应P_F和P_D的就是$d=d_1$时的两种判决概率。



接收机工作特性在不同准则下的解

接收机工作特性在不同准则下的解



2.在极小化极大准则下，求解的条件是满足极小化极大方程，即

$$(C_{11}-C_{00})+(C_{01}-C_{11})P_M(P_{1g}^*)-(C_{10}-C_{00})P_F(P_{1g}^*)=0$$

将$P_M(P_{1g}^*)=1-P_D(P_{1g}^*)$代入上式，得方程

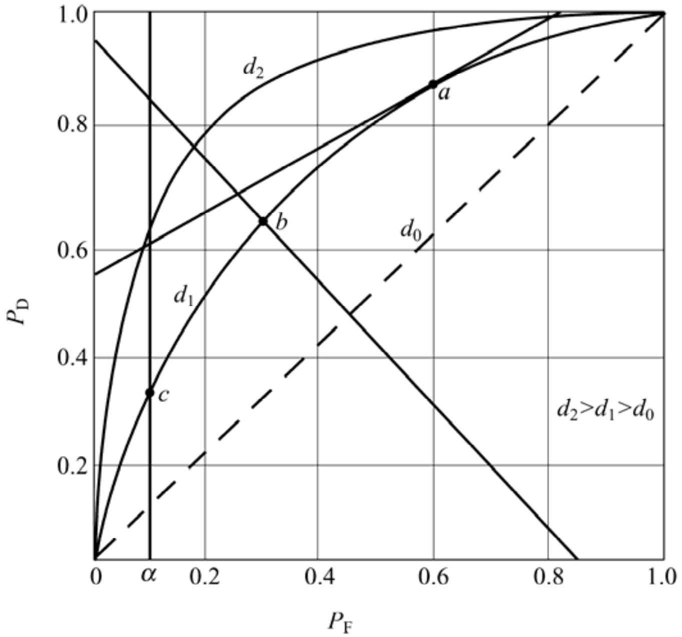
$$(C_{01}-C_{11})P_D(P_{1g}^*)+(C_{11}-C_{00})P_F(P_{1g}^*)-C_{01}+C_{00}=0$$

它是$P_F \sim P_D$平面上的一条直线，当$d=d_1$时，该直线与$d=d_1$的工作特性曲线相交于点b,则b点所对应的P_F和P_D，就是$d=d_1$时极小化极大准则的两种判决概率。

信号统计检测的性能

3.对于纽曼一皮尔逊准则，给定了约束条件$P_F = a$，则其解为$P_F = a$的直线与$d = d_1$工作特性曲线的交点c,该点对应的P_D就是$P_F = a$约束下，信噪比$d = d_1$时的判决概率。

可以说，检测系统的接收机工作特性是似然比检验性能的完整描述。



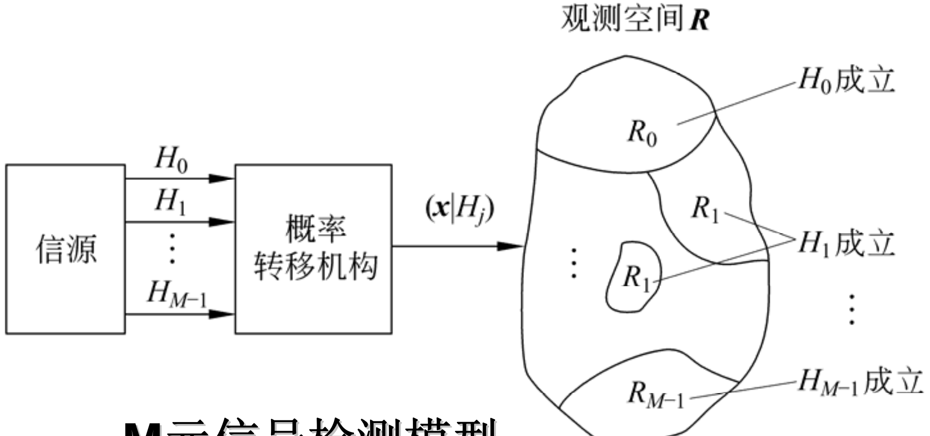
接收机工作特性在不同准则下的解

M元信号的统计检测

观测空间**R**按选定的最佳信号检测准则划分成M个子空间即$R_i, i=0,1,\cdots,M-1$,并满足

$$\mathbf{R}=\bigcup_{i=0}^{M-1}R_i \qquad R_i\cap R_j=\varnothing, i\neq j$$

R_i是判决假设H_i成立的判决域，根据观测矢量x所落在的判决域，就可以作出哪个假设成立的判决。



M元信号检测模型

M元信号的统计检测

如果M个假设的先验概率$P(H_j)(j=0,1,\cdots,M-1)$已知，各种判决的代价因子$C_{ij}(i,j=0,1,\cdots,M-1)$给定，根据$M$元信号检测模型，贝叶斯平均代价$C$可以表示为

$$C=\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{M-1}C_{ij}P(H_j)P(H_i\,|\,H_j)$$

$$=\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{M-1}C_{ij}P(H_j)\int_{R_i}p(\mathbf{x}\,|\,H_j)d\mathbf{x}$$

$$C=\sum_{i=0}^{M-1}C_{ii}P(H_i)+\sum_{i=0}^{M-1}\int_{R_i}\sum_{j=0}^{M-1}P(H_j)(C_{ij}-C_{jj})p(\mathbf{x}\,|\,H_j)d\mathbf{x},\ j\neq i$$

M元信号的统计检测

$$C=\sum_{i=0}^{M-1}C_{ii}P(H_i)+\sum_{i=0}^{M-1}\int_{R_i}\sum_{j=0}^{M-1}P(H_j)(C_{ij}-C_{jj})p(\mathbf{x}\mid H_j)d\mathbf{x},\ j\neq i$$

固定项

最小化

$I_i(\mathbf{x})$

如果定义似然比函数为

$$\lambda_i(\mathbf{x})=\frac{p(\mathbf{x}\mid H_i)}{p(\mathbf{x}\mid H_0)},i=0,1,\cdots,M-1$$

满足$I_i(\mathbf{x})<I_j(\mathbf{x}),\ j=0,1,\cdots,M-1,$
$j\neq i$时判决H_i成立

和函数

$$J_i(\mathbf{x})=\frac{I_i(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x}\mid H_0)}=\sum_{j=0}^{M-1}P(H_j)(C_{ij}-C_{jj})\lambda_i(\mathbf{x})$$

利用似然比表示判决规则，就是选择使为$J_i(\mathbf{x})$最小的对应假设成立。

M元信号的统计检测

如果假设判决代价因子$C_{ii}=0, C_{ij}=1 (i \neq j)$，贝叶斯准则就成为最小平均错误概率准则。

$$I_i(\mathbf{x})=\sum_{j=0}^{M-1} P(H_j)p(\mathbf{x}|H_j), i=0,1,\cdots,M-1, j \neq i$$

当满足$I_i(\mathbf{x})<I_j(\mathbf{x}), j=0,1,\cdots,M-1, j\neq i$时判决$H_i$成立

$$P_e=\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1} P(H_j)P(H_i|H_j), j\neq i$$

先验概率相等

最大似然准则

$$P_e=\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1} P(H_i|H_j), j\neq i$$

选择使$p(\mathbf{x}|H_i)$为最大的假设成立

信号的序列检测

- 事先不规定观测次数，而视实际情况，采用**边观测边判决**的方式，如果观测到第k次还不能作出满意的判决，则可以不作出判决，而继续进行第$k+1$次观测－***信号的序列检测***。
- 信号的序列检测所需平均意义上的检测时间相对于固定观测次数的时间有所减小。
- **信号的序列检测方式的最大优点是在给定的检测性能指标要求下，它所用的平均观测次数最少，即平均检测时间最短。**

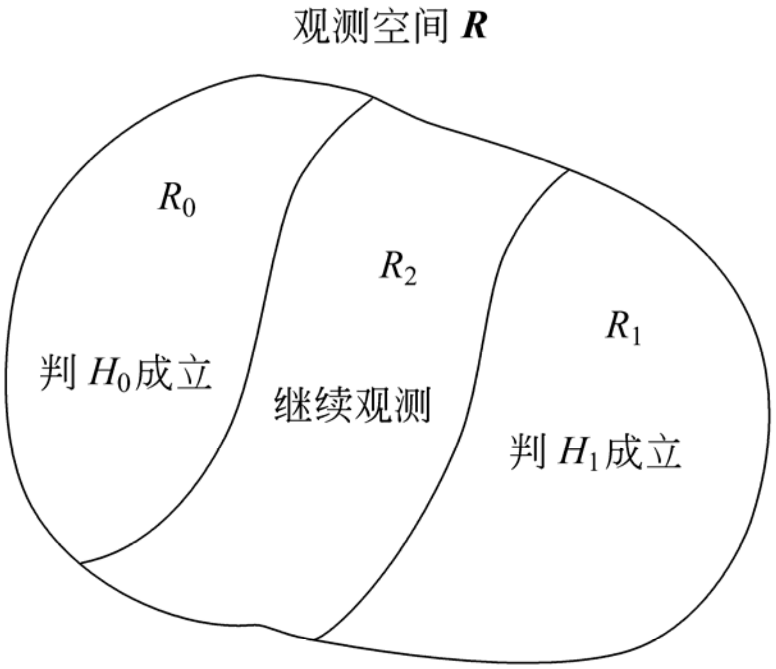
信号的序列检测

二元信号序列检测情况

观测空间**R**被分成R_0，R_1，R_2三个子空间，满足

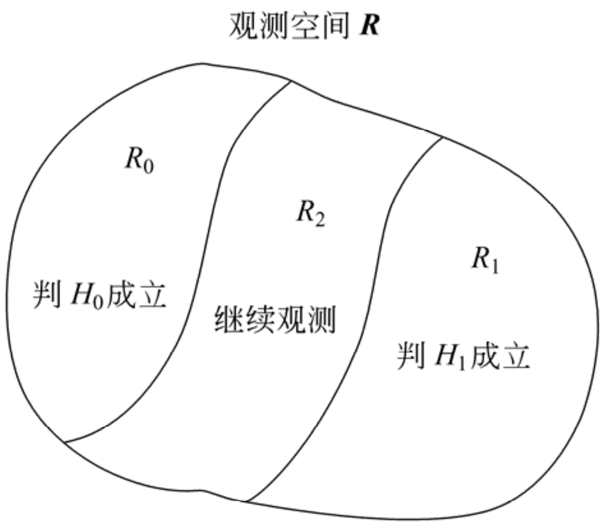
$$\mathbf{R}=\bigcup_{j=0}^{2} R_i$$

$$R_i \cap R_j \neq \varnothing (i, j=0,1,2)$$



序列检测的判决域

信号的序列检测



$$\mathbf{x}_k=(x_1,x_2,\cdots,x_k)^T$$

如果信号观测矢量$\mathbf{x}_k$落在R_0判决域，则判决假设H_0成立；

如果$\mathbf{x}_k$落在R_1判决域，则判决假设H_1成立；

如果$\mathbf{x}_k$落在R_2判决域，则不作出判决，继续进行第$k+1$次观测。

相当于有两个检测门限η_0，η_1，且$\eta_1>\eta_0$，因此似然比检验为

$$\lambda(\mathbf{x}_k)=\frac{p(\mathbf{x}_k\,|\,H_1)}{p(\mathbf{x}_k\,|\,H_0)}\overset{H_1}{\geq}\eta_1\text{和}\lambda(\mathbf{x}_k)=\frac{p(\mathbf{x}_k\,|\,H_1)}{p(\mathbf{x}_k\,|\,H_0)}\underset{H_0}{\leq}\eta_0$$

如果$\lambda(\mathbf{x}_k)$落在η_0和η_1之间，则认为尚不足以作出满足指标要求的判决，需要再进行下一次观测，再进行能否作出判决的处理，此过程原则上要进行到能作出判决为止。

信号的序列检测

设N次观测信号矢量$\mathbf{x}_N=(x_1,x_1,\cdots,x_N)$, 其似然比函数

$$\lambda(\mathbf{x}_N)=\frac{p(\mathbf{x}_N\mid H_1)}{p(\mathbf{x}_N\mid H_0)}=\prod_{k=1}^{N}\frac{p(x_k\mid H_1)}{p(x_k\mid H_0)}=\frac{p(x_N\mid H_1)}{p(x_N\mid H_0)}\prod_{k=1}^{N-1}\frac{p(x_k\mid H_1)}{p(x_k\mid H_0)}$$

观测的独立性假设

因此也可以写成:

$$\lambda(\mathbf{x}_N)=\lambda(x_N)\lambda(x_{N-1})$$

设$p(H_1\mid H_0)$和$p(H_0\mid H_1)$的约束值分别为

$$p(H_1\mid H_0)=\alpha \qquad p(H_0\mid H_1)=\beta$$

若满足$\lambda(\mathbf{x}_N)\ge\eta_1$，则判决假设$H_1$成立；若满足$\lambda(\mathbf{x}_N)\le\eta_0$，则判决假设$H_0$成立；若满足$\eta_0<\lambda(\mathbf{x}_N)<\eta_1$,则需进行下一次观测后，根据$\lambda(\mathbf{x}_{N+1})$再进行检验。

信号的序列检测

检测门限η_1和η_0的近似设计公式

$$\eta_1 = \frac{1-\beta}{\alpha} \qquad \eta_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

信号序列检测的平均观测次数

$$E(N \mid H_1) = \frac{(1-\beta)\ln\eta_1 + \beta\ln\eta_0}{E[\ln\lambda(\mathbf{x} \mid H_1)]}$$

$$E(N \mid H_0) = \frac{(1-\alpha)\ln\eta_0 + \alpha\ln\eta_1}{E[\ln\lambda(\mathbf{x} \mid H_0)]}$$

*Wold*和*Wolfwitz*已经证明，对于给定的$P(H_1 \mid H_0)$和$P(H_0 \mid H_1)$，这种序列检测的方式所需的平均观测次数$E(N \mid H_1)$和$E(N \mid H_0)$是最少的。

信号的序列检测

- 虽然信号的序列检测是会终止的，但可能有时会需要很多的观测次数才能作出判决，这在实际应用中是不希望的。
- 在使用信号的序列检测时，通常规定一个观测次数的上限N^*。当观测次数N达到上限N^*而仍不能作出判决时，就转为固定观测次数的检测方式，强迫作出判决—可截断的序列检测。

广义似然比检验

在假设H_0下，以未知参量θ_0为参数的观测矢量$\mathbf{x}$的PDF为$p(\mathbf{x}|\theta_0;H_0)$,类似地在假设$H_1$下的$PDF$为$p(\mathbf{x}|\theta_1;H_1)$。

1.由$PDF p(\mathbf{x}|\theta_j;H_j)$,利用最大似然估计求信号参量$\theta_j$的最大似然估计$\hat{\theta}_{jml}$

2.用求得的估计量$\hat{\theta}_{jml}$代替似然函数中的未知参量θ_j $(j=0,1)$使问题转变为确知信号的统计检测

3.广义似然比检测为

$$\lambda(\mathbf{x})=\frac{p(\mathbf{x}|\hat{\theta}_{1ml};H_1)}{p(\mathbf{x}|\hat{\theta}_{0ml};H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

Any Questions!

Quiz Time!