

Homework of Digital Signal Processing (Chapter 3)

2018 年 9 月 18 日

1. 一个 LTI 系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1-1.25e^{-j\omega}}{1-0.8e^{-j\omega}} = 1 - \frac{0.45e^{-j\omega}}{1-0.8e^{-j\omega}}$$

- (a) 写出输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 所满足的差分方程。
- (b) 利用上述频率响应形式中的一种，求解单位脉冲响应 $h[n]$ 。
- (c) 证明 $|H(e^{j\omega})|^2 = G^2$ ，其中 G 为常数。求解常数 G 。
- (d) 如果上述系统的输入为 $x[n] = \cos(0.2\pi n)$ ，则输出应该具有 $y[n] = A\cos(0.2\pi n + \theta)$ 的形式。请问 A 和 θ 分别是多少？

2. 一线性时不变系统，其输入/输出关系由如下方程给出：

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

- (a) 求系统单位脉冲响应 $h[n]$ 。
- (b) 该系统是稳定的吗？
- (c) 求系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ ，并用三角恒等式对 $H(e^{j\omega})$ 求得一个简单的表达式。
- (d) 画出频率响应的幅度和相位。
- (e) 考虑一个新的系统，其频率响应 $H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+\pi)})$ ，求新系统的单位脉冲响应 $h_1[n]$ 。

3. 考虑一个单位脉冲响应为 $h_{lp}[n]$ 的理想低通滤波器，其频率响应为

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 0.2\pi \\ 0, & 0.2\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

- (a) 由 $h_1[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$ 定义一个新的滤波器, 确定其频率响应 $H_1(e^{j\omega})$ 的表达式, 并对 $|\omega| < \pi$ 画出 $H_1(e^{j\omega})$ 。这是什么类型的滤波器?
- (b) 由 $h_2[n] = 2h_{lp}[n]\cos(0.5\pi n)$ 定义第 2 个滤波器, 确定其频率响应 $H_2(e^{j\omega})$ 的表达式, 并对 $|\omega| < \pi$ 画出 $H_2(e^{j\omega})$ 。这是什么类型的滤波器?
- (c) 由 $h_3[n] = \frac{\sin(0.1\pi n)}{\pi n} h_{lp}[n]$ 定义第 3 个滤波器, 确定其频率响应 $H_3(e^{j\omega})$ 的表达式, 并对 $|\omega| < \pi$ 画出 $H_3(e^{j\omega})$ 。这是什么类型的滤波器?

4. 信号 $x[n]$ 的自相关序列定义为

$$R_x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]x[n+k]$$

- (a) 证明选择适当的 $g[n]$ 可得到 $R_x[n] = x[n] * g[n]$, 并确认该适当的 $g[n]$ 。
- (b) 证明: $R_x[n]$ 的傅里叶变换等于 $|X(e^{j\omega})|^2$ 。

5. 考虑一个 LTI 系统, 其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2}, \quad |\omega| < \pi$$

试判断该系统是否是因果的。说明理由。

6. 在雷达和声呐中常使用两个频率相关的函数 $\Phi_x(N, \omega)$ 来估计一个信号的频率和行程时间分辨率。对于离散时间信号, 定义

$$\Phi_x(N, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+N]x^*[n-N]e^{-j\omega n}$$

(a) 证明

$$\Phi_x(-N, -\omega) = \Phi_x^*(N, \omega)$$

(b) 若

$$x[n] = A\alpha^n u[n], \quad 0 < \alpha < 1$$

求 $\Phi_x(N, \omega)$ 假设 $(N \geq 0)$ 。

(c) 函数 $\Phi_x(N, \omega)$ 有一个频域对偶关系, 证明

$$\Phi_x(N, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j[v+(\omega/2)]})X^*(e^{j[v-(\omega/2)]})e^{j2vN}dv$$