



《数字信号处理》

Digital Signal Processing

余磊 副教授

武汉大学电子信息学院
Email: ly.wd@whu.edu.cn

本科生课程, 2018 秋

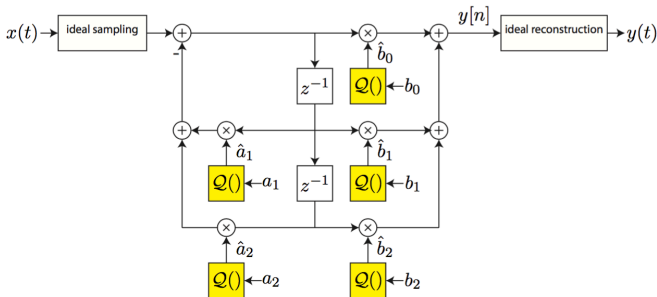


Outline

- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度

实际系统中实现 IIR 滤波器

◆ 二阶 IIR 数字滤波器框图

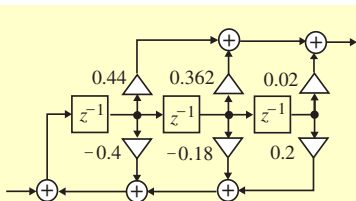


◆ 乘法器系数的量化误差:

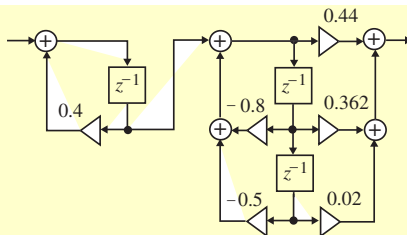
$$\hat{b}_n = b_n + \Delta b_n, \quad \hat{a}_n = a_n + \Delta a_n$$

◆ 量化误差对滤波器的频率响应会产生影响，不同结构的滤波器影响不同。

两种不同的 IIR 滤波器结构实现形式



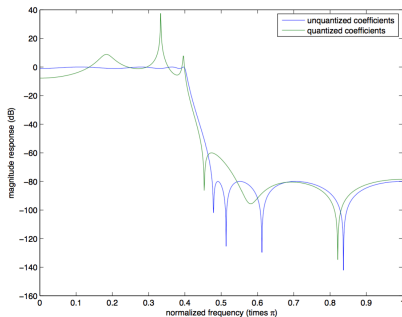
Direct form II



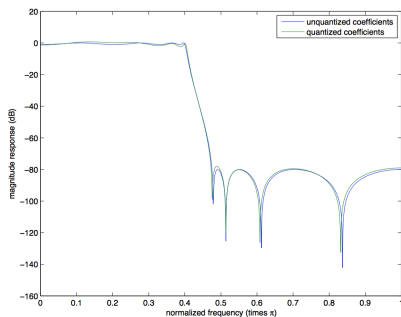
Cascade form

不同结构 IIR 滤波器的幅度谱

直接型 IIR 结构



级联型 IIR 结构



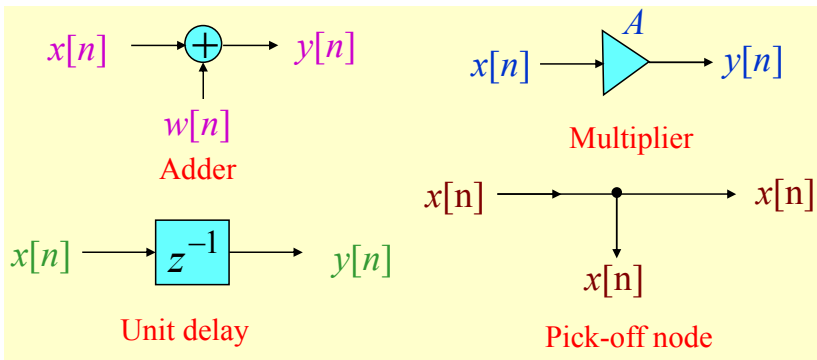


数字滤波器的基本结构

- ◆ 直接型
- ◆ 级联型
- ◆ 并联型

基本结构单元

◆ 基本结构单元：

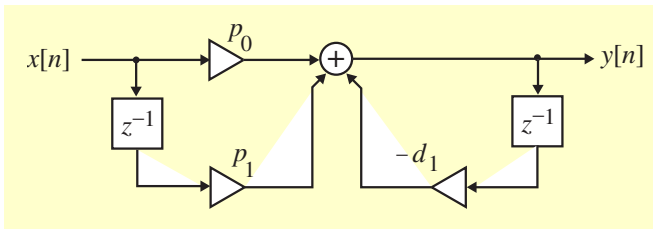


框图表示

◆ 框图法来表示数字滤波器有这样几种好处：

- 通过观察法很容易的写出计算算法
- 通过分析框图可以很容易的确定输出和输入之间的关系
- 可以很容易的通过调整某个框图得到产生不同计算算法的『等效』框图
- 很容易确定硬件的需求
- 利于从传输函数所生成的框图表示来直接得到多种『等效』表示

$$y[n] = -d_1 y[n-1] + p_0 x[n] + p_1 x[n-1]$$



框图的分析方法

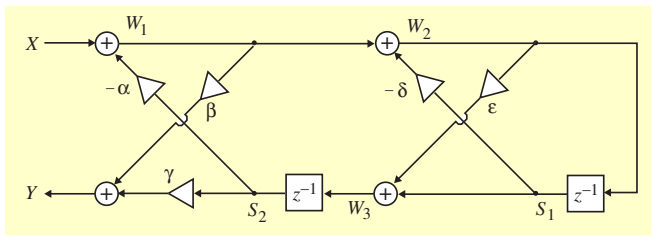
框图 \Rightarrow 输入输出关系

如何根据框图分析系统/滤波器的输入输出关系：

- ① 对每一个加法器的输出设置一个内部变量
- ② 写出加法器输入输出关系，生成一组方程
- ③ 消除方程组中的内部变量，即可得到滤波器输入-输出关系

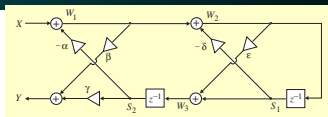
例子

分析下图中所示的级联格型数字滤波器结构。



例子

- 每个加法器的输入输出关系为



$$W_1 = X - \alpha S_2$$

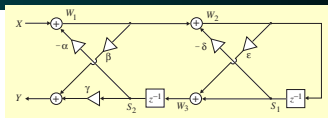
$$W_2 = W_1 - \delta S_1$$

$$W_3 = S_1 + \epsilon S_2$$

$$Y = \beta W_1 + \gamma S_2$$

例子

- 每个加法器的输入输出关系为



$$W_1 = X - \alpha S_2$$

$$W_2 = W_1 - \delta S_1$$

$$W_3 = S_1 + \epsilon S_2$$

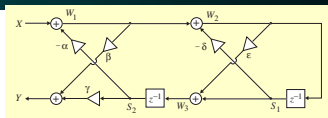
$$Y = \beta W_1 + \gamma S_2$$

- 另外，从图中可以看出

$$S_2 = z^{-1} W_3 \quad S_1 = z^{-1} W_2$$

例子

- 每个加法器的输入输出关系为



$$W_1 = X - \alpha S_2 = X - \alpha z^{-1} W_3$$

$$W_2 = W_1 - \delta S_1 = W_1 - \delta z^{-1} W_2$$

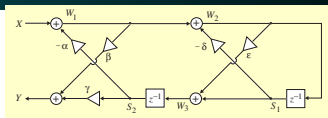
$$W_3 = S_1 + \varepsilon S_2 = z^{-1} W_2 + \varepsilon z^{-1} W_3$$

$$Y = \beta W_1 + \gamma S_2 = \beta W_1 + \gamma z^{-1} W_3$$

- 另外，从图中可以看出

$$S_2 = z^{-1} W_3 \quad S_1 = z^{-1} W_2$$

例子



- 每个加法器的输入输出关系为

$$W_1 = X - \alpha S_2 = X - \alpha z^{-1} W_3$$

$$W_2 = W_1 - \delta S_1 = W_1 - \delta z^{-1} W_2$$

$$W_3 = S_1 + \gamma S_2 = z^{-1} W_2 + \gamma z^{-1} W_3$$

$$Y = \beta W_1 + \gamma S_2 = \beta W_1 + \gamma z^{-1} W_3$$

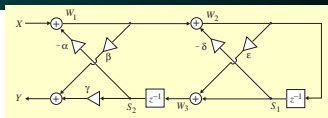
- 另外，从图中可以看出

$$S_2 = z^{-1} W_3 \quad S_1 = z^{-1} W_2$$

- 根据方程组求内部变量的关系

$$\left. \begin{aligned} W_2 &= W_1 / (1 + \delta z^{-1}) \\ W_3 &= (\epsilon + z^{-1}) W_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_3 = \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}} W_1$$

例子



- 每个加法器的输入输出关系为

$$W_1 = X - \alpha S_2 = X - \alpha z^{-1} W_3$$

$$W_2 = W_1 - \delta S_1 = W_1 - \delta z^{-1} W_2$$

$$W_3 = S_1 + \gamma S_2 = z^{-1} W_2 + \gamma z^{-1} W_3$$

$$Y = \beta W_1 + \gamma S_2 = \beta W_1 + \gamma z^{-1} W_3$$

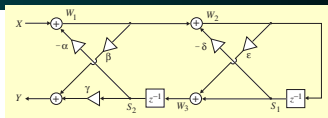
- 另外，从图中可以看出

$$S_2 = z^{-1} W_3 \quad S_1 = z^{-1} W_2$$

- 根据方程组求内部变量的关系

$$\left. \begin{aligned} W_2 &= W_1 / (1 + \delta z^{-1}) \\ W_3 &= (\epsilon + z^{-1}) W_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_3 = \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}} W_1$$

例子



- 每个加法器的输入输出关系为

$$W_1 = X - \alpha S_2 = X - \alpha z^{-1} W_3$$

$$W_2 = W_1 - \delta S_1 = W_1 - \delta z^{-1} W_2$$

$$W_3 = S_1 + \gamma S_2 = z^{-1} W_2 + \gamma z^{-1} W_3$$

$$Y = \beta W_1 + \gamma S_2 = \beta W_1 + \gamma z^{-1} W_3$$

- 另外，从图中可以看出

$$S_2 = z^{-1} W_3 \quad S_1 = z^{-1} W_2$$

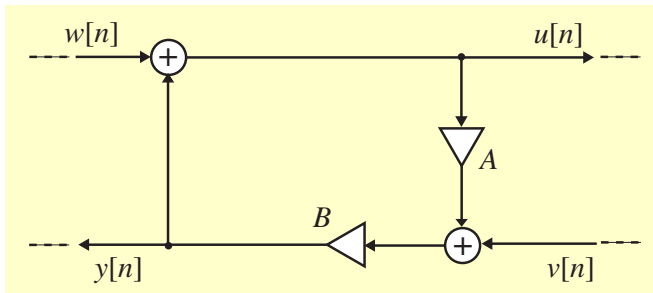
- 根据方程组求内部变量的关系

$$\left. \begin{aligned} W_2 &= W_1 / (1 + \delta z^{-1}) \\ W_3 &= (\epsilon + z^{-1}) W_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_3 = \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}} W_1$$

$$\text{Finally, we have: } H(z) = \frac{Y}{X} = \frac{\beta + (\beta\delta + \gamma\epsilon)z^{-1} + \gamma z^{-2}}{1 + (\delta + \alpha\epsilon)z^{-1} + \alpha z^{-2}}$$

无延迟回路问题

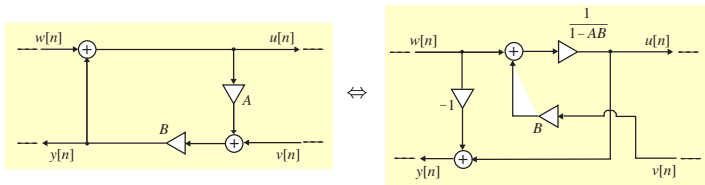
框图表示中必须排除**无延时回路**的情况：滤波器的输出 $y[n]$ 与当前的输出 $y[n]$ 有关 \Rightarrow 物理不可实现



$$y[n] = B(v[n] + A(w[n] + y[n]))$$

无延迟回路问题

无延时回路结构 \Leftrightarrow 没有无延时回路结构



从左边框图可以得到

$$u[n] = w[n] + y[n] \quad y[n] = B(v[n] + Au[n])$$

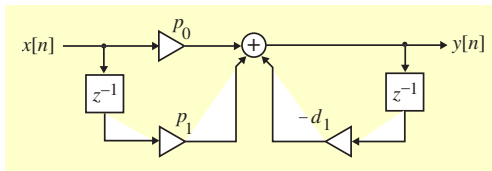
\Rightarrow

$$y[n] = u[n] - w[n]$$

$$u[n] = \frac{1}{1-AB}(w[n] + Bv[n])$$

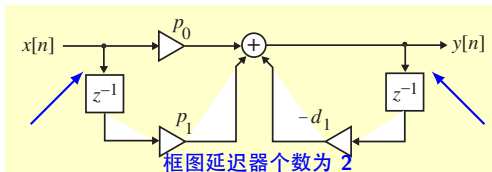
典范和非典范结构

- ◆ 典范结构 (Canonic structure): 框图中延迟器的数量等于差分方程的阶数 (即传输函数的阶数)
- ◆ 非典范结构 (Non canonic structure): 框图中延迟器的数量不等于差分方程的阶数 (即传输函数的阶数)



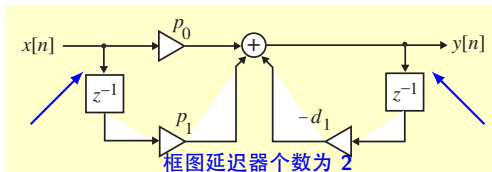
典范和非典范结构

- ◆ 典范结构 (Canonic structure): 框图中延迟器的数量等于差分方程的阶数 (即传输函数的阶数)
- ◆ 非典范结构 (Non canonic structure): 框图中延迟器的数量不等于差分方程的阶数 (即传输函数的阶数)



典范和非典范结构

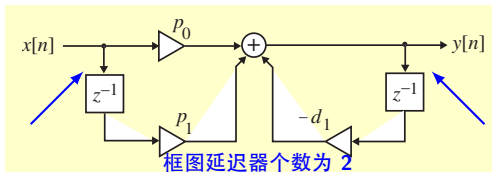
- ◆ 典范结构 (Canonic structure): 框图中延迟器的数量等于差分方程的阶数 (即传输函数的阶数)
- ◆ 非典范结构 (Non canonic structure): 框图中延迟器的数量不等于差分方程的阶数 (即传输函数的阶数)



$$y[n] = -d_1 y[n-1] + p_0 x[n] + p_1 x[n-1] \quad (\text{差分方程阶数为 } 1)$$

典范和非典范结构

- ◆ 典范结构 (Canonical structure): 框图中延迟器的数量等于差分方程的阶数 (即传输函数的阶数)
- ◆ 非典范结构 (Non canonic structure): 框图中延迟器的数量不等于差分方程的阶数 (即传输函数的阶数)



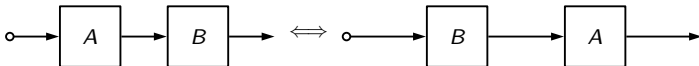
$$y[n] = -d_1 y[n-1] + p_0 x[n] + p_1 x[n-1] \quad (\text{差分方程阶数为 } 1)$$

故该框图为非典范结构

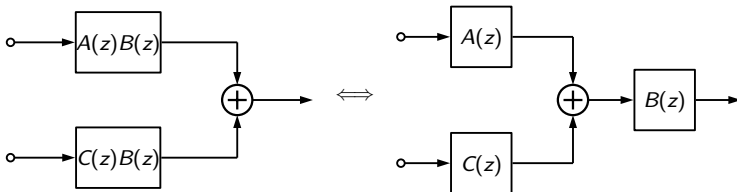
等效结构

等效结构 (**Equivalent structure**): 有着相同的传输函数的两个不同结构的滤波器称为等效结构. 例如:

交换律: $H = AB = BA$



结合律: $AB + CB = (A + C)B$

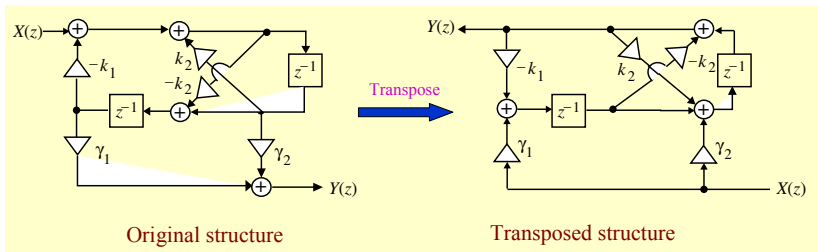


NOTE: which one is better?

转置等效结构

◆ 转置等效结构的实现途径:

- ① 倒转所有路径
- ② 节点 \longleftrightarrow 加法器
- ③ 输入 \longleftrightarrow 输出



◆ NOTES:

- 同一个传输函数可能对应**无限种**滤波器结构
- 在**无限精度运算**条件下, 这些不同的滤波器结构是**完全等效的**
- 在**有限精度运算**条件下, 这些不同的滤波器结构可能**完全不同**

Outline

- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度

Outline

- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度

回顾：FIR 数字滤波器

- ◆ 令 N 阶 FIR 滤波器的冲击响应为 $h[n]$ ，传输函数

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-n}$$

其时域输入输出关系为

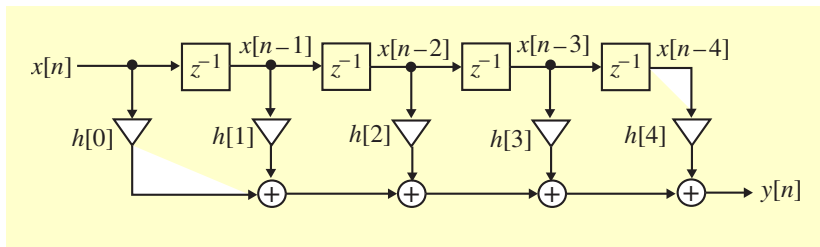
$$y[n] = \sum_{k=0}^N h[k]x[n-k]$$

- ◆ 基本结构：

- ① 直接型
- ② 级联型
- ③ 多相（并联）实现

FIR 数字滤波器的直接型结构

乘法器的系数正好是传输函数的系数，则称为**直接型**结构

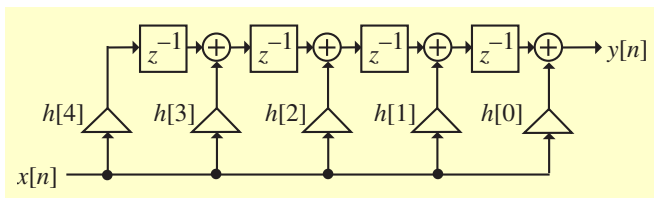


输入输出关系可以通过分析得到

$$y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + h[3]x[n-3] + h[4]x[n-4]$$

FIR 数字滤波器的直接型结构（转置等效）

通过转置操作可以得到前面直接型的等效结构



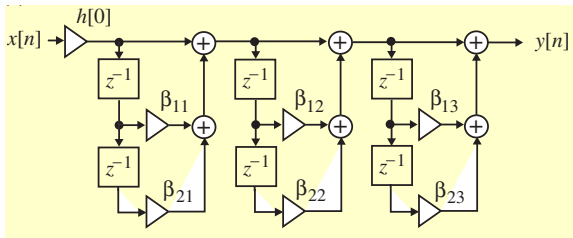
可以发现，这两种直接型结构都是典范型的（延迟的个数与传输函数的阶数相同）

FIR 数字滤波器的级联型结构

FIR 滤波器可以通过因式分解写成如下形式：

$$H(z) = h[0] \prod_{k=1}^K (1 + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2})$$

若 N 为偶数，则 $K = N/2$ ；若 N 为奇数，则 $K = (N+1)/2$ ，且 $\beta_{2K} = 0$ 。
那么我们可以将 FIR 滤波器由 K 个级联的 FIR 滤波器来实现



FIR 数字滤波器的多相（并联）结构

多相实现：考虑一个长度为 9 的因果 FIR 传输函数

$$H(z) = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + h[4]z^{-4} \\ + h[5]z^{-5} + h[6]z^{-6} + h[7]z^{-7} + h[8]z^{-8}$$

按照奇偶次序分成两组（**多相分解**）

$$H(z) = h[0] + h[2]z^{-2} + h[4]z^{-4} + h[6]z^{-6} + h[8]z^{-8} \\ + h[1]z^{-1} + h[3]z^{-3} + h[5]z^{-5} + h[7]z^{-7} \\ = h[0] + h[2]z^{-2} + h[4]z^{-4} + h[6]z^{-6} + h[8]z^{-8} \\ + z^{-1} \left(h[1] + h[3]z^{-2} + h[5]z^{-4} + h[7]z^{-6} \right)$$

FIR 数字滤波器的多相（并联）结构

多相实现：考虑一个长度为 9 的因果 FIR 传输函数

$$H(z) = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + h[4]z^{-4} \\ + h[5]z^{-5} + h[6]z^{-6} + h[7]z^{-7} + h[8]z^{-8}$$

按照奇偶次序分成两组（**多相分解**）

$$\begin{aligned} H(z) &= h[0] + h[2]z^{-2} + h[4]z^{-4} + h[6]z^{-6} + h[8]z^{-8} \\ &\quad + h[1]z^{-1} + h[3]z^{-3} + h[5]z^{-5} + h[7]z^{-7} \\ &= h[0] + h[2]z^{-2} + h[4]z^{-4} + h[6]z^{-6} + h[8]z^{-8} \quad = E_0(z^2) \\ &\quad + z^{-1} \left(h[1] + h[3]z^{-2} + h[5]z^{-4} + h[7]z^{-6} \right) = E_1(z^2) \end{aligned}$$

FIR 数字滤波器的多相（并联）结构

多相实现：考虑一个长度为 9 的因果 FIR 传输函数

$$H(z) = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + h[4]z^{-4} \\ + h[5]z^{-5} + h[6]z^{-6} + h[7]z^{-7} + h[8]z^{-8}$$

按照奇偶次序分成两组（多相分解）

$$\begin{aligned} H(z) &= h[0] + h[2]z^{-2} + h[4]z^{-4} + h[6]z^{-6} + h[8]z^{-8} \\ &\quad + h[1]z^{-1} + h[3]z^{-3} + h[5]z^{-5} + h[7]z^{-7} \\ &= h[0] + h[2]z^{-2} + h[4]z^{-4} + h[6]z^{-6} + h[8]z^{-8} \quad = E_0(z^2) \\ &\quad + z^{-1} \left(h[1] + h[3]z^{-2} + h[5]z^{-4} + h[7]z^{-6} \right) = E_1(z^2) \\ &= E_0(z^2) + z^{-1} E_1(z^2) \end{aligned}$$

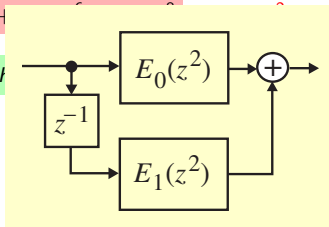
FIR 数字滤波器的多相（并联）结构

多相实现：考虑一个长度为 9 的因果 FIR 传输函数

$$H(z) = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + h[4]z^{-4} \\ + h[5]z^{-5} + h[6]z^{-6} + h[7]z^{-7} + h[8]z^{-8}$$

按照奇偶次序分成两组（**多相分解**）

$$H(z) = h[0] + h[2]z^{-2} + h[4]z^{-4} + h[6]z^{-6} + h[8]z^{-8} \\ + h[1]z^{-1} + h[3]z^{-3} + h[5]z^{-5} + h[7]z^{-7} \\ = h[0] + h[2]z^{-2} + h[4]z^{-4} + h[6]z^{-6} + h[8]z^{-8} \\ + z^{-1} (h[1] + h[3]z^{-2} + h[5]z^{-4} + h[7]z^{-6}) \\ = E_0(z^2) + z^{-1} E_1(z^2)$$



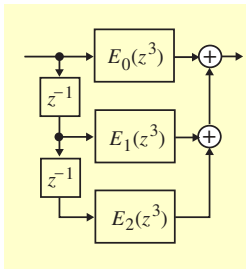
FIR 数字滤波器的多相（并联）结构

多相实现：考虑一个长度为 9 的因果 FIR 传输函数

$$H(z) = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + h[4]z^{-4} \\ + h[5]z^{-5} + h[6]z^{-6} + h[7]z^{-7} + h[8]z^{-8}$$

每隔两项抽取一项（多相分解）

$$H(z) = E_0(z^3) + z^{-1}E_1(z^3) + z^{-2}E_2(z^3)$$



Outline

- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度

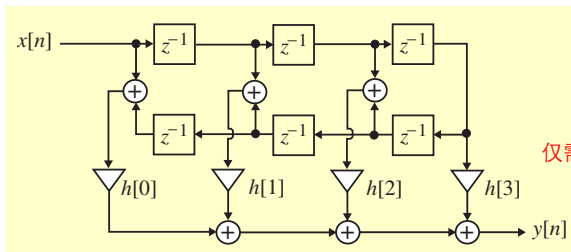
线性相位 FIR 滤波器的结构

利用线性相位 FIR 滤波器的**对称或者反对称性质**，减少乘法器的数量

$$h[n] = \pm h[N-n]$$

考虑 6 阶 1-型线性相位 FIR 滤波器（长度为 7）

$$\begin{aligned} H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + h[2]z^{-4} + h[1]z^{-5} + h[0]z^{-6} \\ &= h[0](1 + z^{-6}) + h[1](z^{-1} + z^{-5}) + h[2](z^{-2} + z^{-4}) + h[3]z^{-3} \end{aligned}$$



仅需 4 个乘法器

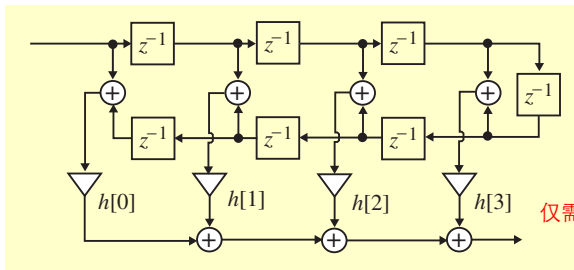
线性相位 FIR 滤波器的结构

利用线性相位 FIR 滤波器的**对称或者反对称性质**，减少乘法器的数量

$$h[n] = \pm h[N-n]$$

考虑 7 阶 2-型线性相位 FIR 滤波器（长度为 8）

$$H(z) = h[0](1 + z^{-7}) + h[1](z^{-1} + z^{-6}) + h[2](z^{-2} + z^{-5}) + h[3](z^{-3} + z^{-4})$$



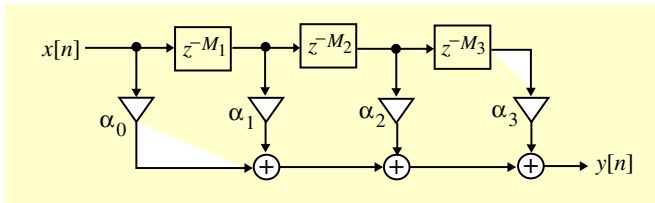
仅需 4 个乘法器

Outline

- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度

抽头延迟线结构

在一些应用中（例如乐声处理），FIR 滤波器可以通过如下结构来实现



抽头延迟线： 该结构由具有 $M_1 + M_2 + M_3$ 个单位延迟的链组成，抽头分别位于输入、前 M_1 个延迟之后、 $M_1 + M_2$ 个延迟之后以及 $M_1 + M_2 + M_3$ 个延迟之后，在这些抽头上分别乘以 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ，然后叠加起来形成输出

$$H(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-M_1} + \alpha_2 z^{-M_2} + \alpha_3 z^{-M_3}$$

Outline

- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度

IIR 数字滤波器的基本结构

◆ IIR 数字滤波器的基本结构

- 直接型结构
 - ① 直接 I 型
 - ② 直接 I_t 型
 - ③ 直接 II 型
 - ④ 直接 II_t 型
- 级联实现
- 并联实现

◆ IIR 数字滤波器的全通实现

直接 I 型结构

IIR 数字滤波器的传输函数一般具有下面的形式

$$H(z) = \frac{P(z)}{D(z)} = \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3}}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + d_3 z^{-3}}$$

那么我们可以将该传输函数分解成级联形式

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

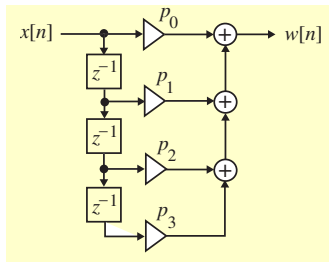
其中

$$H_1(z) = P(z) = p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3}$$
$$H_2(z) = \frac{1}{D(z)} = \frac{1}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + d_3 z^{-3}}$$

直接 I 型结构

$H_1(z)$ 实际上是一个 FIR 滤波器,

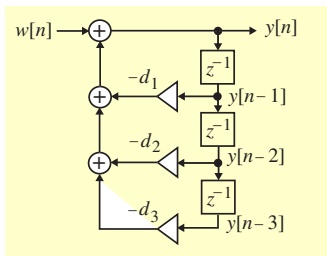
$$w[n] = p_0x[n] + p_1x[n-1] + p_2x[n-2] + p_3x[n-3]$$



直接 I 型结构

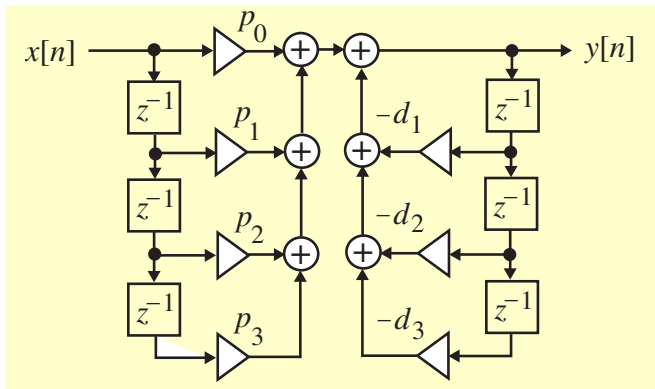
$H_2(z)$ 实际上是一个 IIR 滤波器,

$$y[n] = w[n] - d_1 y[n-1] - d_2 y[n-2] - d_3 y[n-3]$$



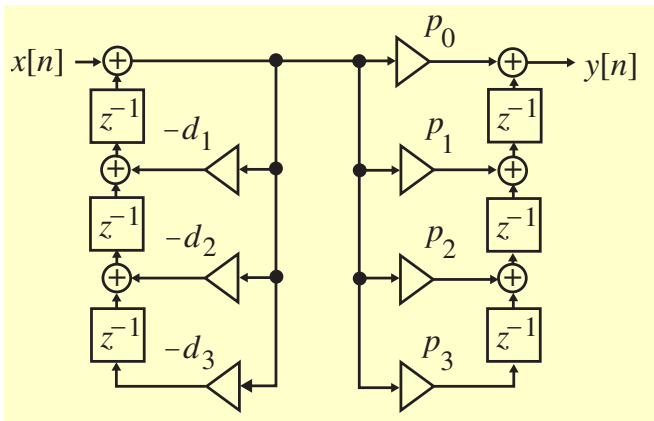
直接 I 型结构

将 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 级联起来可以得到 $H(z)$ 的**直接 I-型结构**实现



直接 I_t 型结构

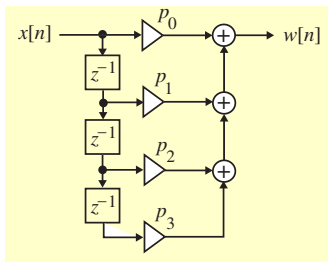
直接 I -型结构的转置等效结构称为直接 I_t -型结构



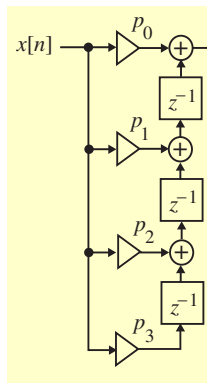
直接型 II 结构

$H_1(z)$ 实际上是一个 FIR 滤波器,

$$w[n] = p_0x[n] + p_1x[n-1] + p_2x[n-2] + p_3x[n-3]$$



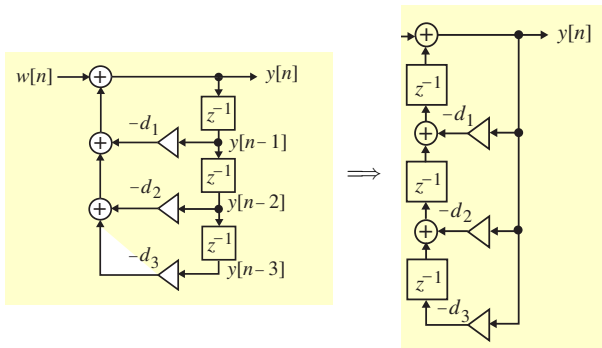
\Rightarrow



直接型 II 结构

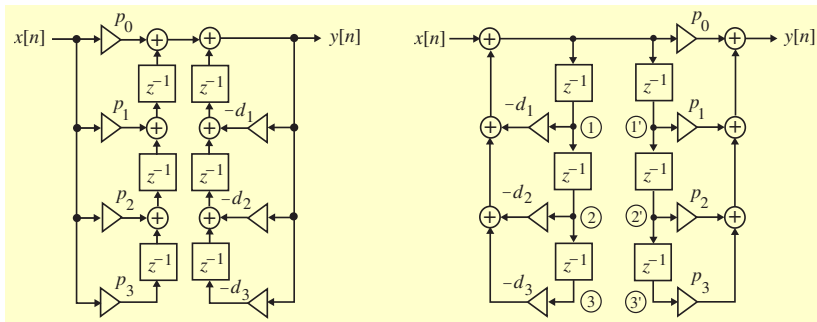
$H_2(z)$ 实际上是一个 IIR 滤波器，

$$y[n] = w[n] - d_1 y[n-1] - d_2 y[n-2] - d_3 y[n-3]$$



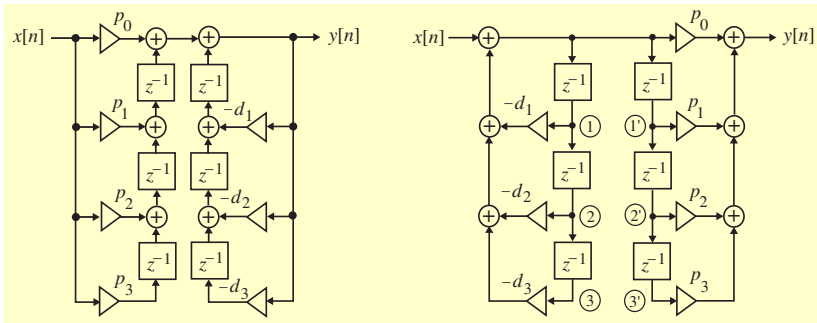
非规范直接 II 型结构

将转置等效结构的 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 级联起来，得到 $H(z)$ 的新结构



非典范直接 II 型结构

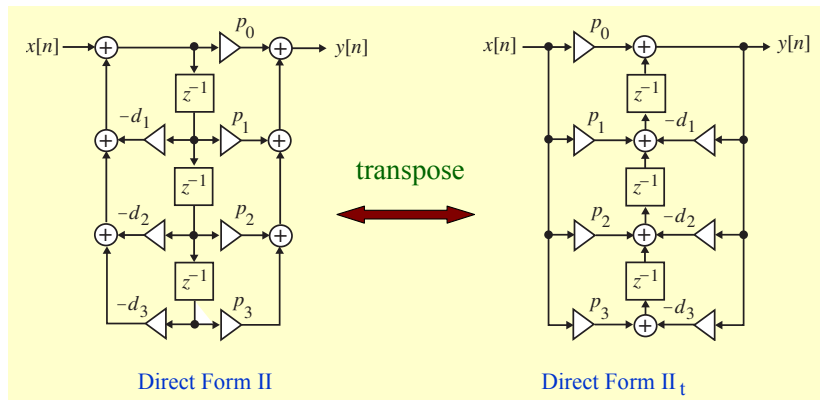
将转置等效结构的 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 级联起来，得到 $H(z)$ 的新结构



可以看到右图中的 ① 和 ①', ② 和 ②' 的变量是一样的

直接 II 和 II_t 型结构

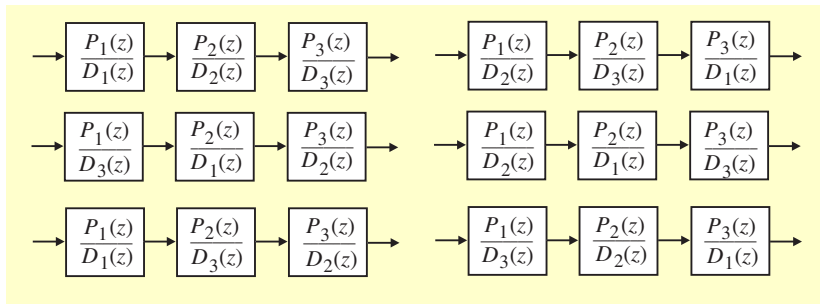
将相同变量的节点合并，则可以得到 IIR 滤波器的**直接 II 型结构**实现，同时，其转置等效结构为**直接 II_t 型结构**



IIR 数字滤波器的级联型结构

IIR 数字滤波器的级联结构可以通过将传输函数的分子和分母分解为多个低阶多项式的乘积得到。

$$H(z) = \frac{P(z)}{D(z)} = \frac{P_1(z)P_2(z)P_3(z)}{D_1(z)D_2(z)D_3(z)}$$



IIR 数字滤波器的级联型结构

一般来说，我们可以将传输函数的分子、分母多项式写成 1 阶或者 2 阶多项式的乘积形式

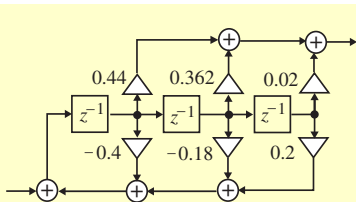
$$H(z) = p_0 \prod_k \left(\frac{1 + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2}}{1 + \alpha_{1k}z^{-1} + \alpha_{2k}z^{-2}} \right)$$

当 $\alpha_{2k} = \beta_{2k} = 0$ 时，对应于 1 阶的情况

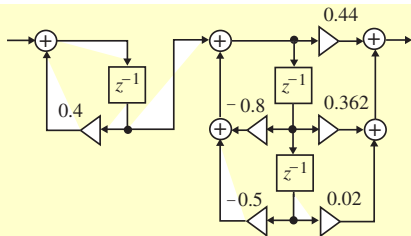
例子

三阶传输函数的直接 II 型实现和级联实现

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{0.44z^{-1} + 0.36z^{-2} + 0.02z^{-3}}{1 + 0.4z^{-1} + 0.18z^{-2} - 0.2z^{-3}} \\
 &= \left(\frac{0.44 + 0.362z^{-1} + 0.02z^{-2}}{1 + 0.8z^{-1} + 0.5z^{-2}} \right) \left(\frac{z^{-1}}{1 - 0.4z^{-1}} \right)
 \end{aligned}$$



Direct form II



Cascade form

IIR 数字滤波器的并联型结构

对传输函数求关于 z^{-1} 多项式部分分式展开可以得到其并联实现形式

- 并联 I 型：写成 z^{-1} 的多项式展开

$$H(z) = \gamma_0 + \sum_k \left(\frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k}z^{-1}}{1 + \alpha_{1k}z^{-1} + \alpha_{2k}z^{-2}} \right)$$

对于实数极点, $\gamma_{1k} = \alpha_{2k} = 0$

IIR 数字滤波器的并联型结构

对传输函数求关于 z^{-1} 多项式部分分式展开可以得到其并联实现形式

- 并联 I 型：写成 z^{-1} 的多项式展开

$$H(z) = \gamma_0 + \sum_k \left(\frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k}z^{-1}}{1 + \alpha_{1k}z^{-1} + \alpha_{2k}z^{-2}} \right)$$

对于实数极点, $\gamma_{1k} = \alpha_{2k} = 0$

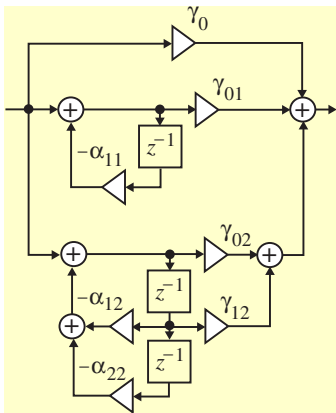
- 并联 II 型：写成 z 的多项式展开

$$H(z) = \delta_0 + \sum_k \left(\frac{\delta_{1k}z^{-1} + \delta_{2k}z^{-2}}{1 + \alpha_{1k}z^{-1} + \alpha_{2k}z^{-2}} \right)$$

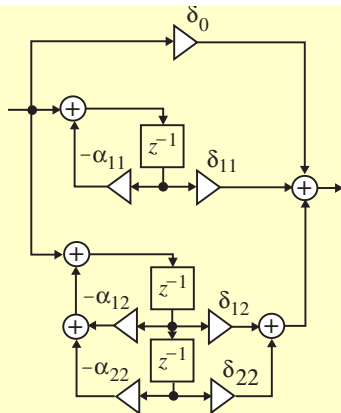
对于实数极点, $\delta_{2k} = \alpha_{2k} = 0$

IIR 数字滤波器的并联型结构

三阶 IIR 传输函数的两种并联型实现



Parallel form I



Parallel form II

例子

三阶传输函数的**并联 I 型实现**和**并联 II 型实现**

$$H(z) = \frac{0.44z^{-1} + 0.36z^{-2} + 0.02z^{-3}}{1 + 0.4z^{-1} + 0.18z^{-2} - 0.2z^{-3}}$$

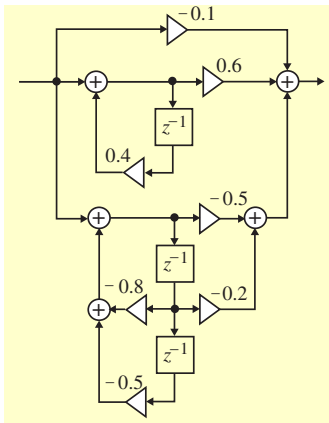
并联 I 型实现: (关于 z^{-1} 的多项式展开)

$$H(z) = -0.1 + \frac{0.6}{1 - 0.4z^{-1}} + \frac{-0.5 - 0.2z^{-1}}{1 + 0.8z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

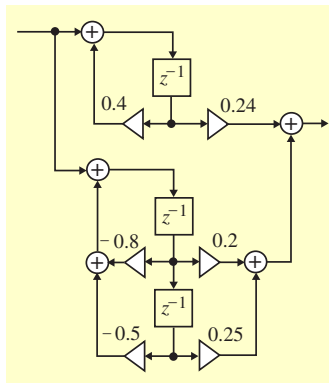
并联 II 型实现: (关于 z 的多项式展开)

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{0.24}{z - 0.4} + \frac{0.2z + 0.25}{z^2 + 0.8z + 0.5z} \\ &= \frac{0.24z^{-1}}{1 - 0.4z^{-1}} + \frac{0.2z^{-1} + 0.25z^{-2}}{1 + 0.8z^{-1} + 0.5z^{-2}} \end{aligned}$$

例子



并联 I 型实现



并联 II 型实现

Outline

- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度

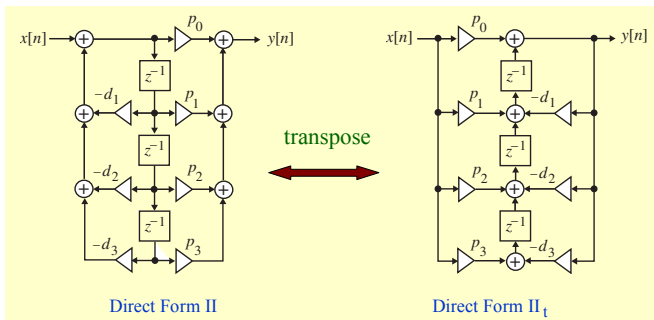
Outline

- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度

全通滤波器的实现

M -阶实系数全通传输函数 $\mathcal{A}_M(z)$ 的直接实现需要 $2M$ 个乘法器。

$$\mathcal{A}_3(z) = \frac{d_3 + d_2 z^{-1} + d_1 z^{-2} + z^{-3}}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + d_3 z^{-3}}$$



如何用 M 乘法器实现 M -阶实系数全通传输函数 $\mathcal{A}_M(z)$?

基于乘法器提取法的实现

任意全通函数都可以表示成二阶或者一阶全通传输函数的乘积的形式。

一阶全通函数

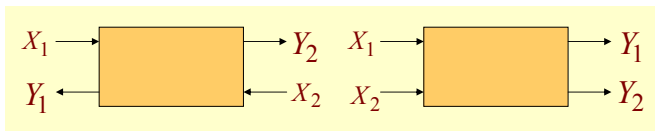
$$\mathcal{A}_1(z) = \frac{d_1 + z^{-1}}{1 + d_1 z^{-1}}$$

二阶全通函数

$$\mathcal{A}_2(z) = \frac{d_2 + d_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}}$$

数字二端口网络

数字二端口网络是一种双输入、双输出结构



$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}}_{\text{chain matrix}} \begin{bmatrix} Y_2 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

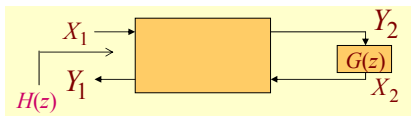
$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}}_{\text{transfer matrix}} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Relationship between *chain matrix* and *transfer matrix*:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \frac{C}{A}, & t_{12} &= \frac{AD - BC}{A}, & t_{21} &= \frac{1}{A}, & t_{22} &= -\frac{C}{A} \\ A &= \frac{1}{t_{21}}, & B &= -\frac{t_{22}}{t_{21}}, & C &= \frac{t_{11}}{t_{21}}, & D &= \frac{t_{12}t_{21} - t_{11}t_{22}}{t_{21}} \end{aligned}$$

受限二端口网络

受限二端口网络



此二端口网络描述的系统的传输函数为

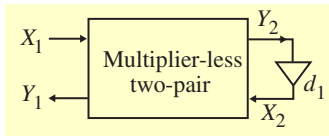
$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{Y_1}{X_1} = \frac{C + D \cdot G(z)}{A + B \cdot G(z)} \\
 &= t_{11} + \frac{t_{12} t_{21} G(z)}{1 - t_{22} G(z)}
 \end{aligned}$$

一阶全通滤波器

对于 1 阶全通传输函数

$$\mathcal{A}_1(z) = \frac{d_1 + z^{-1}}{1 + d_1 z^{-1}}$$

若采用乘法器较少的二端口网络实现：



$$\mathcal{A}_1(z) = t_{11} + \frac{t_{12}t_{21}d_1}{1 - d_1t_{22}} = \frac{t_{11} - d_1(t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21})}{1 - d_1t_{22}}$$

因此

$$t_{11} = z^{-1}, t_{22} = -z^{-1}, t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} = -1$$

一阶全通滤波器

$$\left. \begin{aligned} t_{11} &= z^{-1}, t_{22} = -z^{-1}, \\ t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_{12}t_{21} = 1 - z^{-2}$$

那么存在四种可能的解

$$\text{Type 1A: } t_{11} = z^{-1}, t_{22} = -z^{-1}, t_{12} = 1 - z^{-2}, t_{21} = 1$$

$$\text{Type 1B: } t_{11} = z^{-1}, t_{22} = -z^{-1}, t_{12} = 1 + z^{-1}, t_{21} = 1 - z^{-1}$$

$$\text{Type 1A}_t: t_{11} = z^{-1}, t_{22} = -z^{-1}, t_{12} = 1, t_{21} = 1 - z^{-2}$$

$$\text{Type 1B}_t: t_{11} = z^{-1}, t_{22} = -z^{-1}, t_{12} = 1 - z^{-1}, t_{21} = 1 + z^{-1}$$

Realization of Type 1A

1A 型二端口网络实现

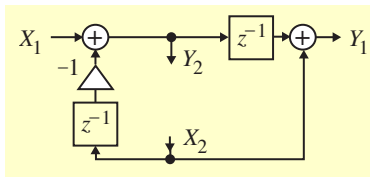
$$\text{Type 1A: } t_{11} = z^{-1}, t_{22} = -z^{-1}, t_{12} = 1 - z^{-2}, t_{21} = 1$$

回顾第七章二端口网络的内容：

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix}}_{\text{transfer matrix}} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

可以得到双输入双输出关系为：

$$\begin{aligned} Y_2 &= X_1 - z^{-1}X_2 \\ Y_1 &= z^{-1}X_1 + (1 - z^{-2})X_2 \\ &= z^{-1}Y_2 + X_2 \end{aligned}$$



Realization of Type 1A

1A 型二端口网络实现

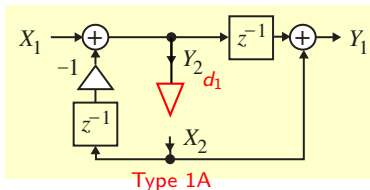
$$\text{Type 1A: } t_{11} = z^{-1}, t_{22} = -z^{-1}, t_{12} = 1 - z^{-2}, t_{21} = 1$$

回顾第七章二端口网络的内容：

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix}}_{\text{transfer matrix}} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

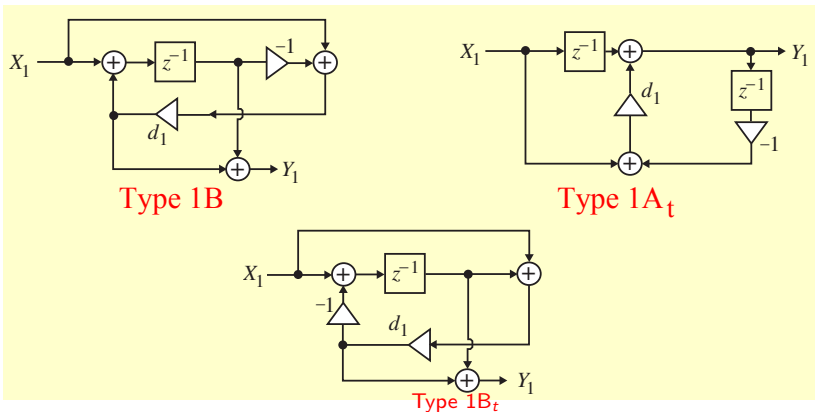
可以得到双输入双输出关系为：

$$\begin{aligned} Y_2 &= X_1 - z^{-1}X_2 \\ Y_1 &= z^{-1}X_1 + (1 - z^{-2})X_2 \\ &= z^{-1}Y_2 + X_2 \end{aligned}$$



Realization of other types

同样的，我们可以用相似的方式实现其他三种形式的二端口网络



Realization of 2nd order Allpass Filters

对于二阶全通滤波器，需要至少两个乘法器，那么则存在下面两种可能性

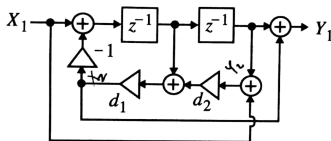
Type 2:

$$\mathcal{A}_2(z) = \frac{d_1 d_2 + d_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + d_1 z^{-1} + d_1 d_2 z^{-2}}$$

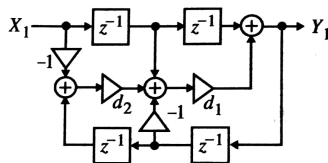
Type 3:

$$\mathcal{A}_2(z) = \frac{d_2 + d_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}}$$

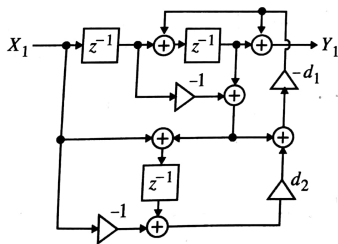
Type 2 Allpass Structures



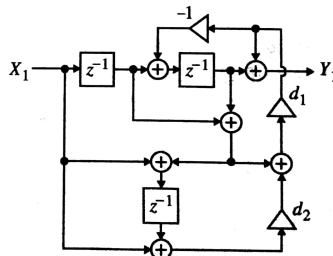
(a)



(b)

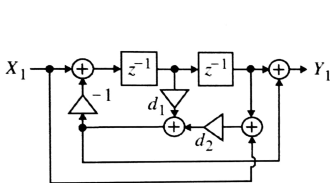


(c)

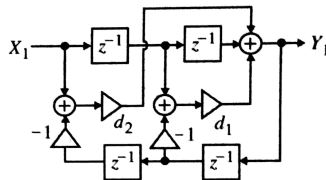


(d)

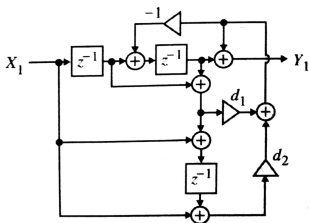
Type 3 Allpass Structures



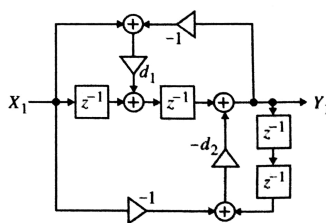
(a)



(b)



(c)



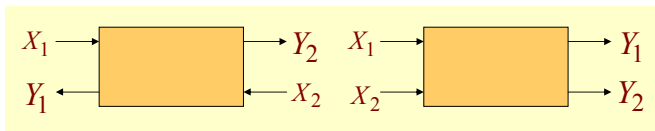
(d)

Outline

- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度

数字二端口网络

数字二端口网络是一种双输入、双输出结构



$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}}_{\text{chain matrix}} \begin{bmatrix} Y_2 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

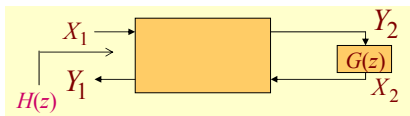
$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}}_{\text{transfer matrix}} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Relationship between *chain matrix* and *transfer matrix*:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \frac{C}{A}, & t_{12} &= \frac{AD - BC}{A}, & t_{21} &= \frac{1}{A}, & t_{22} &= -\frac{C}{A} \\ A &= \frac{1}{t_{21}}, & B &= -\frac{t_{22}}{t_{21}}, & C &= \frac{t_{11}}{t_{21}}, & D &= \frac{t_{12}t_{21} - t_{11}t_{22}}{t_{21}} \end{aligned}$$

受限二端口网络

受限二端口网络



此二端口网络描述的系统的传输函数为

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{Y_1}{X_1} = \frac{C + D \cdot G(z)}{A + B \cdot G(z)} \\
 &= t_{11} + \frac{t_{12} t_{21} G(z)}{1 - t_{22} G(z)}
 \end{aligned}$$

回顾：一般稳定性测试

判断全通函数 $\mathcal{A}_M(z)$ 稳定的充要条件为

- $k_M^2 < 1$, with $k_M = A_M(\infty) = d_M$
- 全通函数 $\mathcal{A}_{M-1}(z)$ 是稳定的

$$\mathcal{A}_{M-1}(z) = z \left[\frac{\mathcal{A}_M(z) - k_M}{1 - k_M \mathcal{A}_M(z)} \right] \Leftrightarrow \mathcal{A}_M(z) = \frac{k_M + z^{-1} \mathcal{A}_{M-1}(z)}{1 + k_M z^{-1} \mathcal{A}_{M-1}(z)}$$

那么 $\mathcal{A}_{M-1}(z)$ 具有如下形式

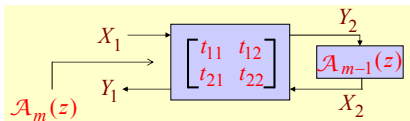
$$\mathcal{A}_{M-1}(z) = \frac{d'_{M-1} + d'_{M-2}z^{-1} + \dots + d'_1 z^{-(M-2)} + z^{-(M-1)}}{1 + d'_1 z^{-1} + \dots + d'_{M-2} z^{-(M-2)} + d'_{M-1} z^{-(M-1)}}$$

with

$$d'_i = \frac{d_i - d_M d_{M-i}}{1 - d_M^2}, \quad i = 1, 2, \dots, M-1$$

基于二端口网络提取算法的实现

◆ 受限二端口网络实现 M 阶全通滤波器



$$\mathcal{A}_M(z) = \frac{t_{11} - (t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21})\mathcal{A}_{M-1}(z)}{1 - t_{22}\mathcal{A}_{M-1}(z)} \Leftrightarrow \mathcal{A}_M(z) = \frac{k_M + z^{-1}\mathcal{A}_{M-1}(z)}{1 + k_M z^{-1}\mathcal{A}_{M-1}(z)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow t_{11} &= k_M, \quad t_{22} = -k_M z^{-1} \\ t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} &= -z^{-1} \\ \Rightarrow t_{12}t_{21} &= (1 - k_M^2)z^{-1} \end{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad t_{12} = z^{-1}, t_{21} = 1 - k_M^2 \\ (2) \quad t_{12} = (1 - k_M)z^{-1}, t_{21} = 1 + k_M \\ (3) \quad t_{12} = \sqrt{1 - k_M^2}z^{-1}, t_{21} = \sqrt{1 - k_M^2} \\ (4) \quad t_{12} = (1 - k_M^2)z^{-1}, t_{21} = 1 \end{array} \right.$$

◆ 四种不同的解对应四种不同的实现方式。

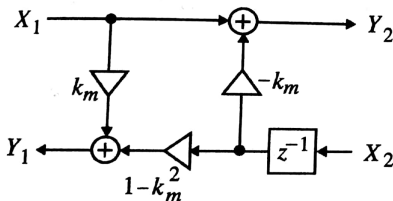
基于二端口网络提取算法的实现 (4)

考虑第四个解：

$$t_{11} = k_M, t_{22} = -k_M z^{-1}, t_{12} = (1 - k_M^2) z^{-1}, t_{21} = 1$$

那么二端口网络的输入输出关系为：

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}}_{\text{transfer matrix}} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_M X_1 + (1 - k_M^2) z^{-1} X_2 \\ X_1 - k_M z^{-1} X_2 \end{bmatrix}$$



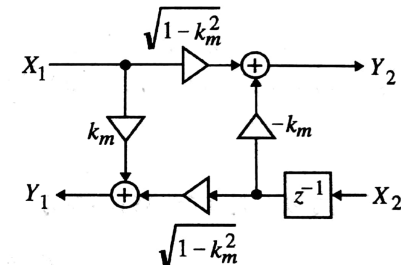
基于二端口网络提取算法的实现 (3)

考虑第三个解：

$$t_{11} = k_M, t_{22} = -k_M z^{-1}, t_{12} = \sqrt{1 - k_M^2} z^{-1}, t_{21} = \sqrt{1 - k_M^2}$$

那么二端口网络的输入输出关系为：

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}}_{\text{transfer matrix}} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_M X_1 + \sqrt{1 - k_M^2} z^{-1} X_2 \\ \sqrt{1 - k_M^2} X_1 - k_M z^{-1} X_2 \end{bmatrix}$$



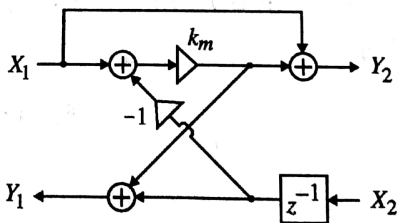
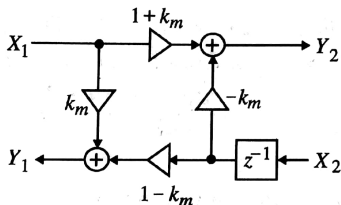
基于二端口网络提取算法的实现 (2)

考虑第二个解:

$$t_{11} = k_M, t_{22} = -k_M z^{-1}, t_{12} = (1 - k_M) z^{-1}, t_{21} = 1 + k_M$$

那么二端口网络的输入输出关系为:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_M X_1 + (1 - k_M) z^{-1} X_2 \\ (1 + k_M) X_1 - k_M z^{-1} X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1} X_2 + k_M (X_1 - z^{-1} X_2) \\ X_1 + k_M (X_1 - z^{-1} X_2) \end{bmatrix}$$



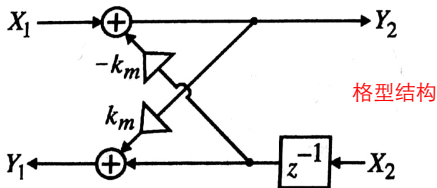
基于二端口网络提取算法的实现 (1)

考虑第一个解：

$$t_{11} = k_M, t_{22} = -k_M z^{-1}, t_{12} = z^{-1}, t_{21} = 1 - k_M^2$$

那么二端口网络的输入输出关系为：

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_M X_1 + (1 - k_M^2) z^{-1} X_2 \\ X_1 - k_M z^{-1} X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_M Y_2 + z^{-1} X_2 \\ X_1 - k_M z^{-1} X_2 \end{bmatrix}$$

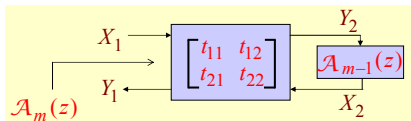


全通函数的格型二端口网络实现

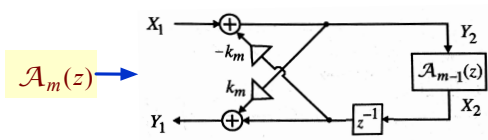
$M-1$ 阶全通函数 $\mathcal{A}_{M-1}(z) \Rightarrow M$ 阶全通函数 $\mathcal{A}_M(z)$

$$\mathcal{A}_M(z) = \frac{t_{11} - (t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21})\mathcal{A}_{M-1}(z)}{1 - t_{22}\mathcal{A}_{M-1}(z)} \Leftrightarrow \mathcal{A}_M(z) = \frac{k_M + z^{-1}\mathcal{A}_{M-1}(z)}{1 + k_M z^{-1}\mathcal{A}_{M-1}(z)}$$

对于 M -阶全通函数，可以利用二端口网络来实现



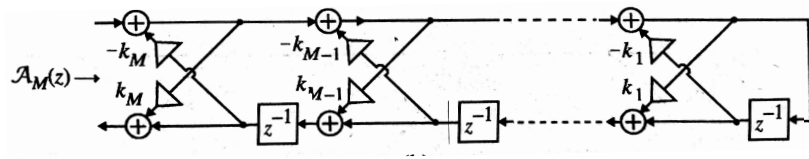
采用格型结构实现如下



全通函数的级联格型二端口网络实现

$$\mathcal{A}_0 = 1 \Rightarrow \mathcal{A}_1(z) \Rightarrow \dots \Rightarrow \mathcal{A}_{M-2}(z) \Rightarrow \mathcal{A}_{M-1}(z) \Rightarrow \mathcal{A}_M(z)$$

采用格型结构实现如下

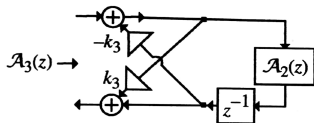


Example

全通传输函数的级联格型实现

$$\mathcal{A}_3(z) = \frac{-0.2 + 0.18z^{-1} + 0.4z^{-2} + z^{-3}}{1 + 0.4z^{-1} + 0.18z^{-2} - 0.2z^{-3}} = \frac{d_3 + d_2z^{-1} + d_1z^{-2} + z^{-3}}{1 + d_1z^{-1} + d_2z^{-2} + d_3z^{-3}}$$

首先用二阶全通函数 $\mathcal{A}_2(z)$ 实现 $\mathcal{A}_3(z)$



其中, $k_3 = d_3 = -0.2$, 且

$$\mathcal{A}_2 = \frac{d'_2 + d'_1z^{-1} + z^{-2}}{1 + d'_1z^{-1} + d'_2z^{-2}}$$

二阶全通函数的系数为

$$d'_1 = \frac{d_1 - d_3d_2}{1 - d_3^2} = 0.454$$

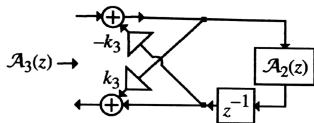
$$d'_2 = \frac{d_2 - d_3d_1}{1 - d_3^2} = 0.271$$

Example

全通传输函数的级联格型实现

$$\mathcal{A}_3(z) = \frac{-0.2 + 0.18z^{-1} + 0.4z^{-2} + z^{-3}}{1 + 0.4z^{-1} + 0.18z^{-2} - 0.2z^{-3}} = \frac{d_3 + d_2z^{-1} + d_1z^{-2} + z^{-3}}{1 + d_1z^{-1} + d_2z^{-2} + d_3z^{-3}}$$

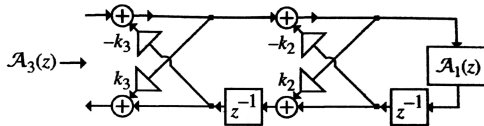
首先用二阶全通函数 $\mathcal{A}_2(z)$ 实现 $\mathcal{A}_3(z)$



其中, $k_3 = d_3 = -0.2$, 且

$$\mathcal{A}_2 = \frac{d'_2 + d'_1z^{-1} + z^{-2}}{1 + d'_1z^{-1} + d'_2z^{-2}}$$

以此类推, 可以用 1 阶全通函数实现二阶全通函数

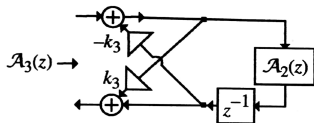


Example

全通传输函数的级联格型实现

$$\mathcal{A}_3(z) = \frac{-0.2 + 0.18z^{-1} + 0.4z^{-2} + z^{-3}}{1 + 0.4z^{-1} + 0.18z^{-2} - 0.2z^{-3}} = \frac{d_3 + d_2z^{-1} + d_1z^{-2} + z^{-3}}{1 + d_1z^{-1} + d_2z^{-2} + d_3z^{-3}}$$

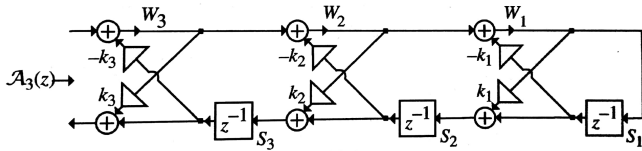
首先用二阶全通函数 $\mathcal{A}_2(z)$ 实现 $\mathcal{A}_3(z)$



其中, $k_3 = d_3 = -0.2$, 且

$$\mathcal{A}_2 = \frac{d'_2 + d'_1z^{-1} + z^{-2}}{1 + d'_1z^{-1} + d'_2z^{-2}}$$

以此类推, 可以用 0 阶全通函数实现 1 阶全通函数





Outline

- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度

Outline

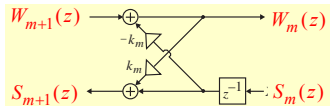
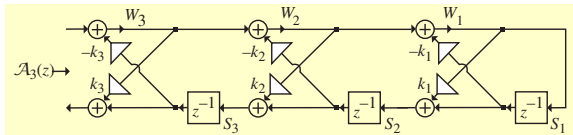
- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度

利用全通函数实现全极点传输函数

用全通函数实现全极点传输函数 $H(z)$

$$A(z) = \frac{z^{-M} D_M(z^{-1})}{D_M(z)} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{D_M(z)}, D_M(z) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_M z^{-M}$$

3 阶全通函数的格型结构实现如下



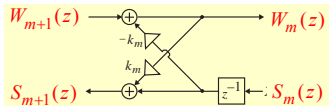
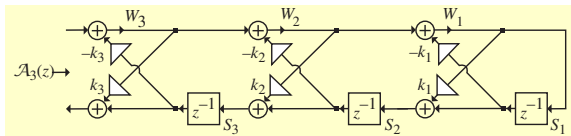
$$\begin{aligned} W_m(z) &= W_{m+1}(z) - k_m z^{-1} S_m(z) \\ \Rightarrow S_{m+1}(z) &= k_m W_m(z) + z^{-1} S_m(z) \end{aligned}$$

利用全通函数实现全极点传输函数

用全通函数实现全极点传输函数 $H(z)$

$$A(z) = \frac{z^{-M} D_M(z^{-1})}{D_M(z)} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{D_M(z)}, D_M(z) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_M z^{-M}$$

3 阶全通函数的格型结构实现如下



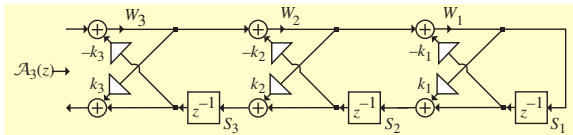
$$\begin{bmatrix} W_{m+1}(z) \\ S_{m+1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_m z^{-1} \\ k_m & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_m(z) \\ S_m(z) \end{bmatrix}$$

利用全通函数实现全极点传输函数

用全通函数实现全极点传输函数 $H(z)$

$$\mathcal{A}(z) = \frac{z^{-M}D_M(z^{-1})}{D_M(z)} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{D_M(z)}, D_M(z) = 1 + d_1z^{-1} + \dots + d_Mz^{-M}$$

3 阶全通函数的格型结构实现如下



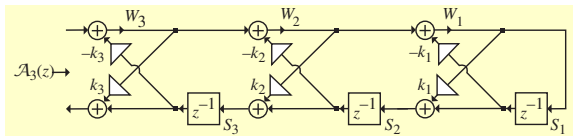
$$\begin{bmatrix} X_1(z) \\ Y_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_3z^{-1} \\ k_3 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k_2z^{-1} \\ k_2 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k_1z^{-1} \\ k_1 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1(z) \\ S_1(z) \end{bmatrix}$$

利用全通函数实现全极点传输函数

用全通函数实现全极点传输函数 $H(z)$

$$\mathcal{A}(z) = \frac{z^{-M} D_M(z^{-1})}{D_M(z)} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{D_M(z)}, D_M(z) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_M z^{-M}$$

3 阶全通函数的格型结构实现如下



从图中可知 $W_1 = S_1$ ，所以

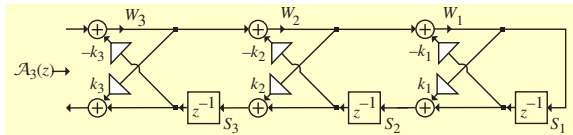
$$X_1(z) = \left(1 + [k_1(1 + k_2) + k_2 k_3] z^{-1} + [k_2 + k_1 k_3(1 + k_2)] z^{-2} + k_3 z^{-3} \right) W_1(z)$$

利用全通函数实现全极点传输函数

用全通函数实现全极点传输函数 $H(z)$

$$\mathcal{A}(z) = \frac{z^{-M} D_M(z^{-1})}{D_M(z)} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{D_M(z)}, D_M(z) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_M z^{-M}$$

3 阶全通函数的格型结构实现如下



由于 $k_m = \mathcal{A}_m(\infty) = d_m$ (参见 P314, 式 8.45), 所以

$$X_1(z) = (1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + d_3 z^{-3}) W_1(z)$$

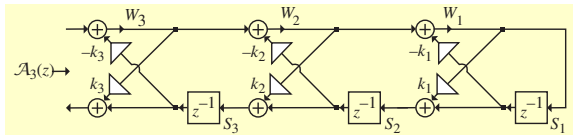
$$\frac{W_1(z)}{X_1(z)} = \frac{1}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + d_3 z^{-3}}$$

利用全通函数实现全极点传输函数

用全通函数实现全极点传输函数 $H(z)$

$$\mathcal{A}(z) = \frac{z^{-M} D_M(z^{-1})}{D_M(z)} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{D_M(z)}, D_M(z) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_M z^{-M}$$

3 阶全通函数的格型结构实现如下



由于 $k_m = \mathcal{A}_m(\infty) = d_m$ (参见 P314, 式 8.45), 所以

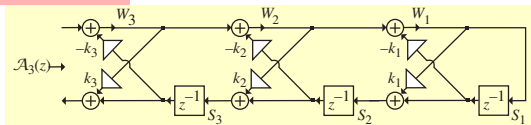
$$X_1(z) = (1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + d_3 z^{-3}) W_1(z)$$

$$H(z) = \frac{W_1(z)}{X_1(z)} = \frac{1}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + d_3 z^{-3}}$$

Gray-Markel Method

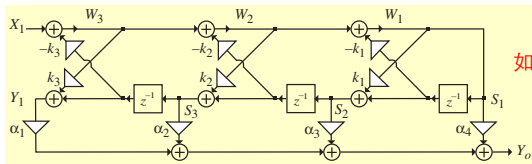
用全通函数实现任意 IIR 传输函数 $H(z)$

$$A(z) = \frac{z^{-M} D_M(z^{-1})}{D_M(z)} \Rightarrow H(z) = \frac{P_M(z)}{D_M(z)}, P_M(z) = 1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_M z^{-M}$$



3 阶全通函数的格型结构:

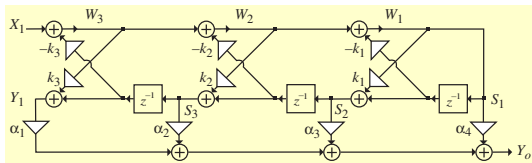
IIR 抽头级联格型结构实现: $\frac{Y_o}{X_1} = H(z)$



如何确定 $\alpha_i |_{i=1, \dots, 4}$?

Gray-Markel Method

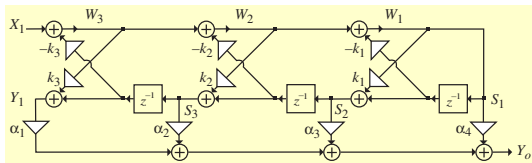
IIR 抽头级联格型结构实现: $\frac{Y_o}{X_1} = H(z)$



$$\frac{S_1(z)}{X_1(z)} = \frac{1}{D_3(z)}$$

Gray-Markel Method

IIR 抽头级联格型结构实现: $\frac{Y_o}{X_1} = H(z)$



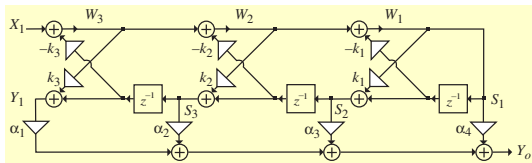
$$\frac{S_1(z)}{X_1(z)} = \frac{1}{D_3(z)}$$

$$\frac{S_2(z)}{X_1(z)} = \frac{d'_1(z) + z^{-1}}{D_3(z)}$$

$$\begin{aligned} S_2(z) &= (k_1 + z^{-1})S_1(z) \\ &= (d'_1 + z^{-1})S_1(z) \end{aligned}$$

Gray-Markel Method

IIR 抽头级联格型结构实现: $\frac{Y_o}{X_1} = H(z)$



$$\frac{S_1(z)}{X_1(z)} = \frac{1}{D_3(z)}$$

$$\frac{S_2(z)}{X_1(z)} = \frac{d_1'(z) + z^{-1}}{D_3(z)}$$

$$\frac{S_3(z)}{X_1(z)} = \frac{d_2' + d_1' z^{-1} + z^{-2}}{D_3(z)}$$

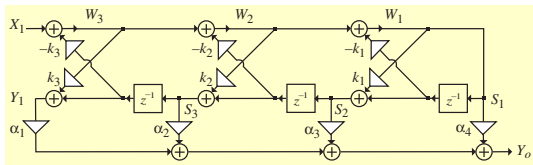
$$S_2(z) = (d_1' + z^{-1}) S_1(z)$$

$$S_3(z) = d_2' W_2(z) + z^{-1} S_2(z)$$

$$S_1(z) = W_2(z) - d_1' z^{-1} S_1(z)$$

Gray-Markel Method

IIR 抽头级联格型结构实现: $\frac{Y_o}{X_1} = H(z)$



输入输出关系为

$$\begin{aligned}
 \frac{Y_o}{X_1} &= \alpha_1 \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} + \alpha_2 \frac{S_3(z)}{X_1(z)} + \alpha_3 \frac{S_2(z)}{X_1(z)} + \alpha_4 \frac{S_1(z)}{X_1(z)} \\
 &= \frac{P_3(z)}{D_3(z)} \\
 &= \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3}}{D_3(z)}
 \end{aligned}$$

Gray-Markel Method

根据对应关系可以写出 α_i 与 p_0, p_1, \dots, p_3 之间的关系

$$\begin{aligned}\alpha_1 d_3 + \alpha_2 d_2' + \alpha_3 d_1'' + \alpha_4 &= p_0 \\ \alpha_1 d_2 + \alpha_2 d_1' + \alpha_3 &= p_1 \\ \alpha_1 d_1 + \alpha_2 &= p_2 \\ \alpha_1 &= p_3\end{aligned}$$

求解上述关于 α_i 的方程得到

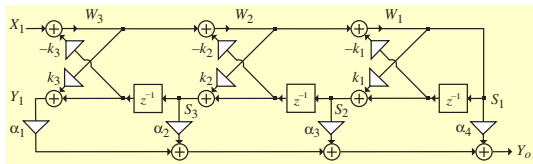
$$\begin{aligned}\alpha_1 &= p_3 \\ \alpha_2 &= p_2 - \alpha_1 d_1 \\ \alpha_3 &= p_1 - \alpha_1 d_2 - \alpha_2 d_1' \\ \alpha_4 &= p_0 - \alpha_1 d_3 - \alpha_2 d_2' - \alpha_3 d_1''\end{aligned}$$

IIR Cascaded Lattice Structures

$$H(z) = \frac{P_M(z)}{D_M(z)}$$

IIR 级联格型结构的实现方法：

- ① 利用级联格型结构实现全通函数 $A_M(z) = \frac{z^{-M}D_M(z^{-1})}{D_M(z)}$
- ② 反馈线上抽头加权输出，加权系数可以由 Gray-Markel 方法计算出来



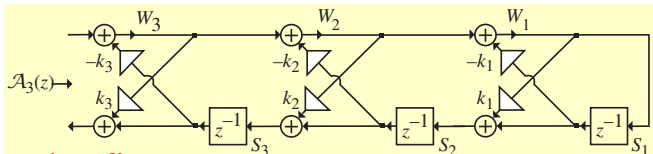
Example

IIR 级联格型结构实现

$$H(z) = \frac{P_3(z)}{D_3(z)} = \frac{0.44z^{-1} + 0.362z^{-2} + 0.02z^{-3}}{1 + 0.4z^{-1} + 0.18z^{-2} - 0.2z^{-3}}$$

构造全通函数 $\mathcal{A}_3(z) \Rightarrow$ 全通函数的格型结构实现

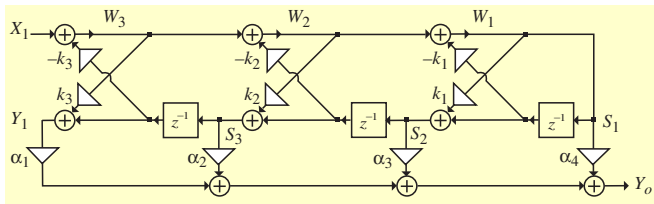
$$\mathcal{A}_3(z) = \frac{z^{-3}D_3(z^{-1})}{D_3(z)} = \frac{-0.2 + 0.18z^{-1} + 0.04z^{-2} + z^{-3}}{1 + 0.4z^{-1} + 0.18z^{-2} - 0.2z^{-3}}$$



$$k_3 = d_3 = -0.2, k_2 = d'_2 = 0.271, k_1 = d'_1 = 0.357$$

Example

$$H(z) = \frac{P_3(z)}{D_3(z)} = \frac{0.44z^{-1} + 0.362z^{-2} + 0.02z^{-3}}{1 + 0.4z^{-1} + 0.18z^{-2} - 0.2z^{-3}}$$



计算抽头权重

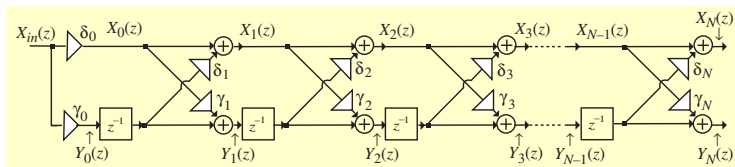
$$\begin{aligned} \alpha_1 &= p_3 &= 0.02 \\ \alpha_2 &= p_2 - \alpha_1 d_1 &= 0.352 \\ \alpha_3 &= p_1 - \alpha_1 d_2 - \alpha_2 d'_1 &= 0.277 \\ \alpha_4 &= p_0 - \alpha_1 d_3 - \alpha_2 d'_2 - \alpha_3 d''_1 &= -0.190 \end{aligned}$$

Outline

- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度

FIR Cascaded Lattice Structures

级联格型结构同时实现两个 FIR 系统 $H_N(z)$ 和 $G_N(z)$



两个 FIR 系统

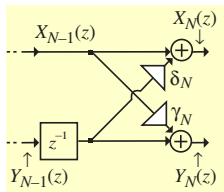
$$H_N(z) = \frac{X_N(z)}{X_{in}(z)}$$

$$G_N(z) = \frac{Y_N(z)}{X_{in}(z)}$$

需要确定乘法器的系数 δ_i 和 γ_i

FIR Cascaded Lattice Structures

第 i 阶和第 $i-1$ 阶 FIR 传输函数的关系



其中, $K_i = \frac{1}{1 - \delta_i \gamma_i}$.

$$\begin{bmatrix} H_i(z) \\ G_i(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta_i z^{-1} \\ \gamma_i & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{i-1}(z) \\ G_{i-1}(z) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} H_{i-1}(z) \\ G_{i-1}(z) \end{bmatrix} = K_i \begin{bmatrix} 1 & -\delta_i \\ -z\gamma_i & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_i(z) \\ G_i(z) \end{bmatrix}$$

FIR Cascaded Lattice Structures

i 阶 FIR 级联格型结构和 $i-1$ 阶 FIR 级联格型结构

假设

$$H_i(z) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)} z^{-1} + a_2^{(i)} z^{-2} + \cdots + a_i^{(i)} z^{-i}$$

$$G_i(z) = b_0^{(i)} + b_1^{(i)} z^{-1} + b_2^{(i)} z^{-2} + \cdots + b_i^{(i)} z^{-i}$$

那么

$$H_{i-1}(z) = K_i \left[(a_0^{(i)} - \delta_i b_0^{(i)}) + (a_1^{(i)} - \delta_i b_1^{(i)}) z^{-1} + \cdots + (a_i^{(i)} - \delta_i b_i^{(i)}) z^{-i} \right]$$

$$G_{i-1}(z) = K_i z \left[(b_0^{(i)} - \gamma_i a_0^{(i)}) + (b_1^{(i)} - \gamma_i a_1^{(i)}) z^{-1} + \cdots + (b_i^{(i)} - \gamma_i a_i^{(i)}) z^{-i} \right]$$

FIR Cascaded Lattice Structures

i 阶 FIR 级联格型结构和 $i-1$ 阶 FIR 级联格型结构

假设

$$H_i(z) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)} z^{-1} + a_2^{(i)} z^{-2} + \cdots + a_i^{(i)} z^{-i}$$

$$G_i(z) = b_0^{(i)} + b_1^{(i)} z^{-1} + b_2^{(i)} z^{-2} + \cdots + b_i^{(i)} z^{-i}$$

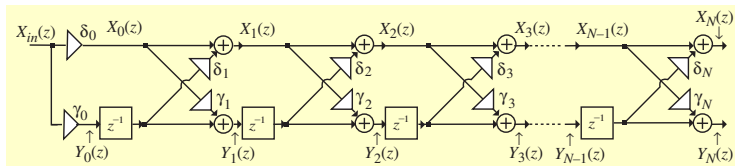
那么

$$H_{i-1}(z) = K_i \left[(a_0^{(i)} - \delta_i b_0^{(i)}) + (a_1^{(i)} - \delta_i b_1^{(i)}) z^{-1} + \cdots + (a_i^{(i)} - \delta_i b_i^{(i)}) z^{-i} \right] \quad = 0$$

$$G_{i-1}(z) = K_i z \left[(b_0^{(i)} - \gamma_i a_0^{(i)}) + (b_1^{(i)} - \gamma_i a_1^{(i)}) z^{-1} + \cdots + (b_i^{(i)} - \gamma_i a_i^{(i)}) z^{-i} \right] \quad = 0$$

FIR Cascaded Lattice Structures

级联格型结构同时实现两个 FIR 系统 $H_N(z)$ 和 $G_N(z)$



其中的系数为

$$\delta_i = \frac{a_i^{(i)}}{b_i^{(i)}}$$

$$\gamma_i = \frac{b_0^{(i)}}{a_0^{(i)}}$$

Example

FIR 系统 $H_N(z)$ 和 $G_N(z)$ 的级联格型结构实现

$$H_4(z) = 2 + 20z^{-1} - 83z^{-2} - 10z^{-3} + 2z^{-4}$$

$$G_4(z) = 10 + 34z^{-1} - 107z^{-2} - 17z^{-3} - z^{-4}$$

4 阶 \rightarrow 3 阶

$$\delta_4 = \frac{a_4^{(4)}}{b_4^{(4)}} = \frac{2}{-1} = -2,$$

$$\gamma_4 = \frac{b_0^{(4)}}{a_0^{(4)}} = \frac{10}{2} = 5$$

$$K_4 = \frac{1}{1 - \delta_4 \gamma_4} = \frac{1}{1 + 10} = \frac{1}{11}$$

Example

3 阶 FIR 滤波器

$$H_3(z) = 2 + 8z^{-1} - 27z^{-2} - 4z^{-3}$$

$$G_3(z) = -6 + 28z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3}$$

3 阶 \rightarrow 2 阶

$$\delta_3 = \frac{a_3^{(3)}}{b_3^{(3)}} = \frac{-4}{-1} = 4,$$

$$\gamma_3 = \frac{b_0^{(3)}}{a_0^{(3)}} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$K_3 = \frac{1}{1 - \delta_3 \gamma_3} = \frac{1}{1 + 12} = \frac{1}{13}$$

Example

2 阶 FIR 滤波器

$$H_2(z) = 2 - 8z^{-1} - 3z^{-2}$$

$$G_2(z) = 4 - 6z^{-1} - z^{-2}$$

2 阶 \rightarrow 1 阶

$$\delta_2 = \frac{a_2^{(2)}}{b_2^{(2)}} = \frac{-3}{-1} = 3,$$

$$\gamma_2 = \frac{b_0^{(2)}}{a_0^{(2)}} = \frac{4}{2} = 2$$

Example

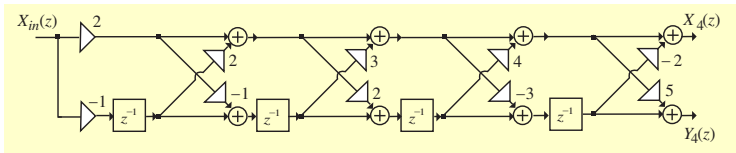
1 阶 FIR 滤波器

$$H_1(z) = 2 - 2z^{-1}$$

$$G_1(z) = -2 - z^{-1}$$

1 阶 \rightarrow 0 阶

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{a_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} = \frac{-2}{-1} = 2, & \Rightarrow \delta_0 &= H_0(z) = a_0^{(1)} = 2 \\ \gamma_1 &= \frac{b_0^{(1)}}{a_0^{(1)}} = \frac{-2}{2} = -1 & \Rightarrow \gamma_0 &= G_0(z) = b_1^{(1)} = -1 \end{aligned}$$



Outline

- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度

Tunable IIR Digital Filters

利用全通函数可以实现其他滤波器

Realize lowpass/highpass filter via Allpass filter

1 阶低通滤波器:

$$H_{LP}(z) = \frac{1-\alpha}{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} \right)$$

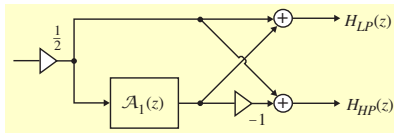
1 阶高通滤波器:

$$H_{HP}(z) = \frac{1+\alpha}{2} \left(\frac{1-z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} \right)$$

可以得出 ($\mathcal{A}_1(z) = \frac{-\alpha + z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$)

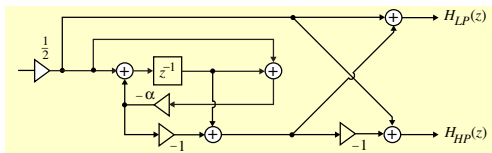
$$H_{LP}(z) = \frac{1}{2} [1 + \mathcal{A}_1(z)]$$

$$H_{HP}(z) = \frac{1}{2} [1 - \mathcal{A}_1(z)]$$

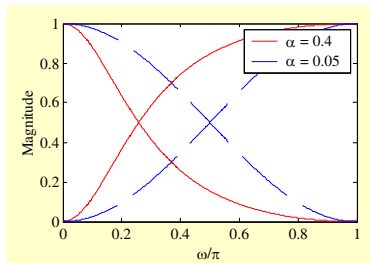


Realize lowpass/highpass filter via Allpass filter

滤波器的截止频率可以通过 α 的值来确定



不同的 α 对应的幅度响应



Realize bandpass/bandstop via Allpass filter

2 阶带通传输函数:

$$H_{BP}(z) = \frac{1-\alpha}{2} \left(\frac{1-z^2}{1-\beta(1+\alpha)z^{-1}+\alpha z^{-2}} \right)$$

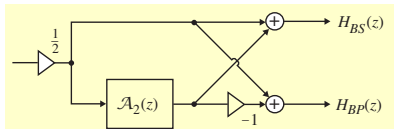
2 阶带阻传输函数:

$$H_{BS}(z) = \frac{1+\alpha}{2} \left(\frac{1-\beta z^{-1}+z^2}{1-\beta(1+\alpha)z^{-1}+\alpha z^{-2}} \right)$$

可以得出 ($\mathcal{A}_2(z) = \frac{\alpha - \beta(1+\alpha)z^{-1} + z^{-2}}{1 - \beta(1+\alpha)z^{-1} + \alpha z^{-2}}$)

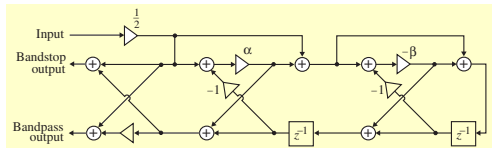
$$H_{BP}(z) = \frac{1}{2} [1 + \mathcal{A}_2(z)]$$

$$H_{BS}(z) = \frac{1}{2} [1 - \mathcal{A}_2(z)]$$

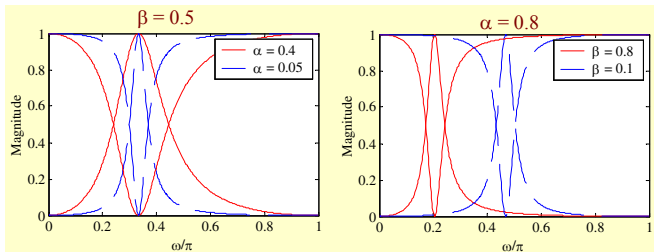


Realize bandpass/bandstop via Allpass filter

滤波器可以通过 β 确定截止频率, α 确定 3-dB 带宽



不同的 α 和 β 对应的幅度响应





Outline

- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度



Outline

- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度

几种 FIR 数字滤波器结构的复杂度比较

表 8.1 N 阶 FIR 滤波器的各种实现方法的计算复杂度比较

结构	乘法器的数量	两输入加法器的数量
直接型	$N + 1$	N
级联型	$N + 1$	N
多相	$N + 1$	N
级联格型	$2(N + 1)$	$2N + 1$
线性相位	$\left\lfloor \frac{N+2}{2} \right\rfloor$	N

几种 IIR 数字滤波器结构的复杂度比较

表 8.2 N 阶 IIR 滤波器的各种实现方法的计算复杂度比较

结构	乘法器的数量	两输入加法器的数量
直接 II 型和 II _L 型	$2N + 1$	$2N$
级联型	$2N + 1$	$2N$
并联型	$2N + 1$	$2N$
Gray-Markel 1	$3N + 1$	$3N$
Gray-Markel 2	$2N + 1$	$4N$
并联全通	$N + 1$	$3N + 2$

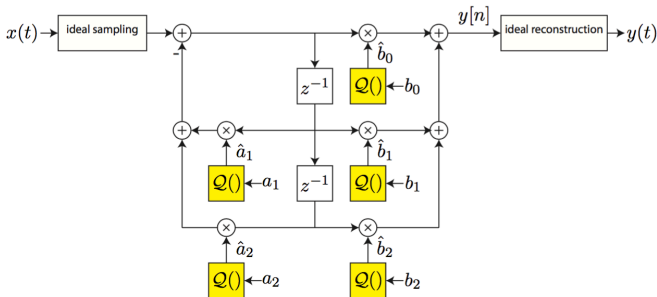


Outline

- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度

实际系统中实现 IIR 滤波器

◆ 二阶 IIR 数字滤波器框图



◆ 乘法器系数的量化误差:

$$\hat{b}_n = b_n + \Delta b_n, \quad \hat{a}_n = a_n + \Delta a_n$$

◆ 量化误差对滤波器的频率响应会产生影响，不同结构的滤波器影响不同。

级联型 or 直接型

分母多项式 $D(z)$ 通过因式分解, 可以分解成多个二阶多项式 (SOS) 的级联形式

$$H(z) = \frac{P(z)}{D(z)} = \frac{P_1(z)P_2(z)P_3(z)}{D_1(z)D_2(z)D_3(z)D_4(z)}$$

例子:

$$D(z) = 1 - 3.76z^{-1} + 8.2z^{-2} - 11.85z^{-3} + 12.33z^{-4} - 9.3z^{-5} + 4.98z^{-6} - 1.74z^{-7} + 0.32z^{-8}$$

分解后:

$$D_1(z) = 1 - 0.74z^{-1} + 0.8610z^{-2}$$

$$D_2(z) = 1 - 1.04z^{-1} + 0.7062z^{-2}$$

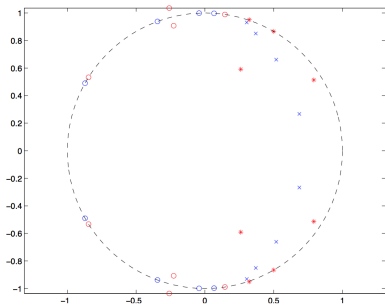
$$D_3(z) = 1 - 1.37z^{-1} + 0.5431z^{-2}$$

$$D_4(z) = 1 - 0.61z^{-1} + 0.9605z^{-2}$$

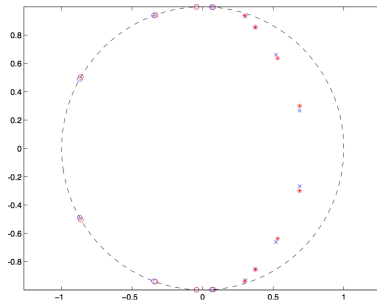
动态范围大大减小, 那么可以减小量化步长。

级联型 or 直接型

直接型结构 (8比特量化)

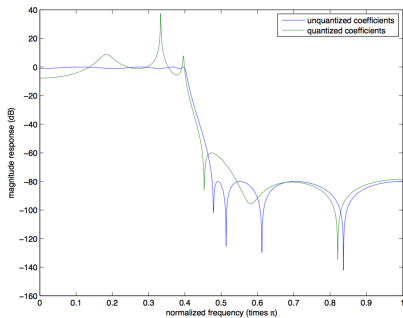


级联型结构 (6比特量化)

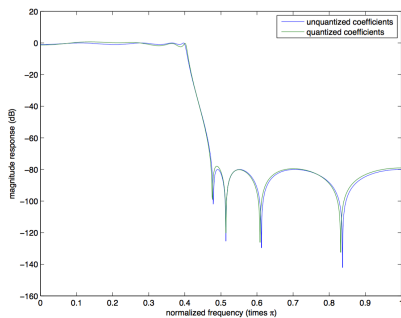


幅度谱

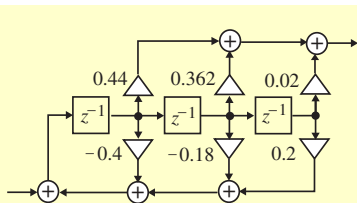
直接型 IIR 结构



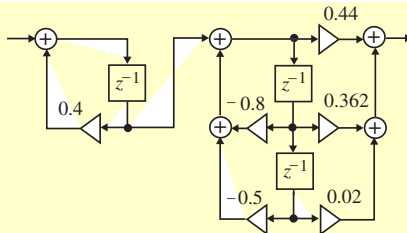
级联型 IIR 结构



两种不同的 IIR 滤波器结构实现形式



Direct form II



Cascade form

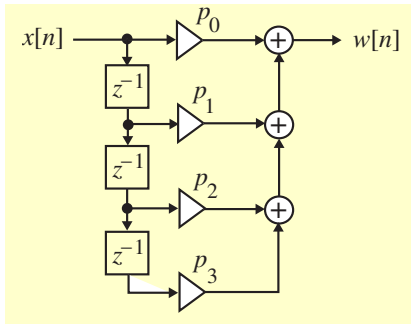
尽量使用级联型结构来实现数字滤波器。

Outline

- 1 数字滤波器的结构及框图表示方法
- 2 FIR 数字滤波器的结构
 - 基本结构：直接型、级联型、并联型
 - 线性相位结构
 - 抽头延迟器
- 3 IIR 数字滤波器的结构
- 4 全通滤波器结构
 - 基于乘法器提取法的实现
 - 基于二端口网络提取法的实现
- 5 级联格型结构
 - IIR 级联格型结构
 - FIR 级联格型结构
- 6 可调谐 IIR 数字滤波器
- 7 数字滤波器的实现
 - 实现复杂度
 - 乘法器量化
 - 灵敏度

直接型 IIR 数字滤波器的实现

对于二阶全极点 IIR 滤波器，其直接 II 型实现为：



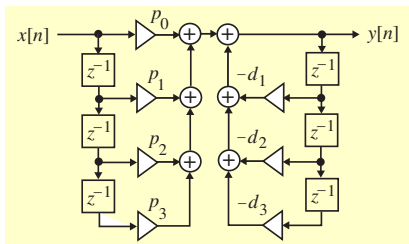
$$H(z) = \frac{1}{1 + Kz^{-1} + Lz^{-2}}$$

极点位置为：

$$z_1 = re^{j\theta} = \frac{-K + \sqrt{K^2 - 4L}}{2}, \quad z_2 = re^{-j\theta} = \frac{-K - \sqrt{K^2 - 4L}}{2}$$

耦合结构 IIR 数字滤波器的实现

采用耦合结构实现二阶全极点 IIR 滤波器：



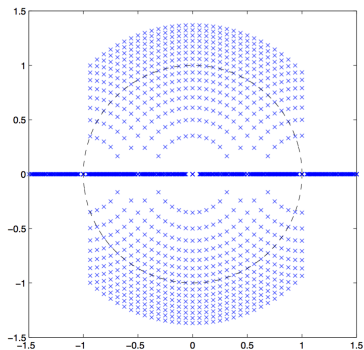
$$H(z) = \frac{\beta}{1 - 2\alpha z^{-1} + (\alpha^2 + \beta^2)z^{-2}}$$

极点位置为：

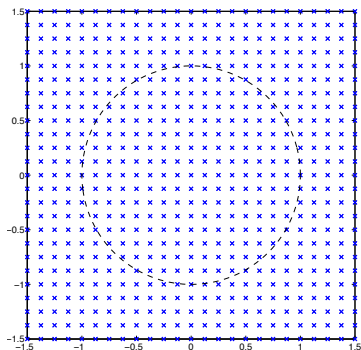
$$z_1 = re^{j\theta} = \alpha + j\beta, \quad z_2 = re^{-j\theta} = \alpha - j\beta$$

5 比特量化零极点的分布

直接型结构



耦合结构



直接型 or 耦合型

◆ 直接型结构的零极点量化分布：

- $z = \pm j$ 附近极点密度很高
- $z = \pm 1$ 附近极点密度很低
- 因此，采用直接 II 型结构实现 IIR 低通或者高通滤波器，若极点位置比较靠近 ± 1 ，会导致很大的误差

◆ 耦合型结构的零极点量化分布：

- 极点分布在 z -平面是均匀的
- 可以用来实现任意类型的二阶传输函数
- 极点量化误差更容易分析

Homework

8.13, 8.24, 8.26, 8.53