

《数字信号处理》：数字滤波器设计

Digital Signal Processing: Digital Filter Design

余磊 副教授

武汉大学电子信息学院
Email: ly.wd@whu.edu.cn

本科生课程, 2018 秋

自强不息
厚德载物



Outline

1 介绍

2 数字滤波器分类：基于幅度响应

- 低通、高通、带通、带阻
- 有界实传输函数
- 全通滤波器

3 数字滤波器分类：基于相位响应

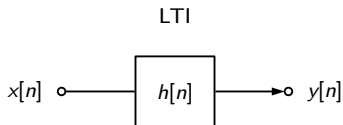
- 零相位
- 线性相位
- 最大/小相位

4 数字滤波器分类：其他

5 数字滤波器设计方法

- IIR 数字滤波器
 - 双线性变换
 - 谱变换
- FIR 数字滤波器
 - 加窗冲激响应
 - 窗函数形状
- 计算机辅助滤波器设计

LTI 离散时间系统



差分方程:

$$\sum_{p=0}^{N-1} d_p x[n-p] = \sum_{q=0}^{M-1} a_q x[n-q]$$

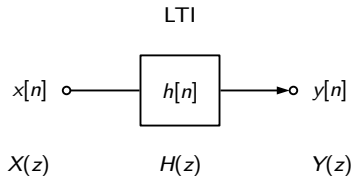
冲激响应:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k]$$

传输函数:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

LTI 离散时间系统



差分方程:

$$\sum_{p=0}^{N-1} d_p x[n-p] = \sum_{q=0}^{M-1} a_q x[n-q]$$

冲激响应:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k]$$

传输函数:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

离散时间系统的分类

- ◆ 时域分类：根据 LTI 离散时间系统的冲激响应 $h[n]$ 的长度
 - ◆ 有限长冲激响应系统
 - ◆ 无限长冲激响应系统
- ◆ 频域分类（传输函数）：根据频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的幅度谱和相位谱
 - ◆ 幅度谱：
 - ◆ 低通、高通、带通、带阻数字滤波器
 - ◆ 有界实传输函数
 - ◆ 全通传输函数
 - ◆ 相位谱：
 - ◆ 零相位响应
 - ◆ 线性相位
 - ◆ 最小/最大相位响应
- ◆ 功能分类：根据滤波器的具体功能
 - ◆ 数字积分器
 - ◆ 数字微分器

Outline

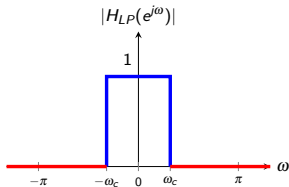
- 1 介绍
- 2 数字滤波器分类：基于幅度响应
 - 低通、高通、带通、带阻
 - 有界实传输函数
 - 全通滤波器
- 3 数字滤波器分类：基于相位响应
 - 零相位
 - 线性相位
 - 最大/小相位
- 4 数字滤波器分类：其他
- 5 数字滤波器设计方法
 - IIR 数字滤波器
 - 双线性变换
 - 谱变换
 - FIR 数字滤波器
 - 加窗冲激响应
 - 窗函数形状
 - 计算机辅助滤波器设计

Outline

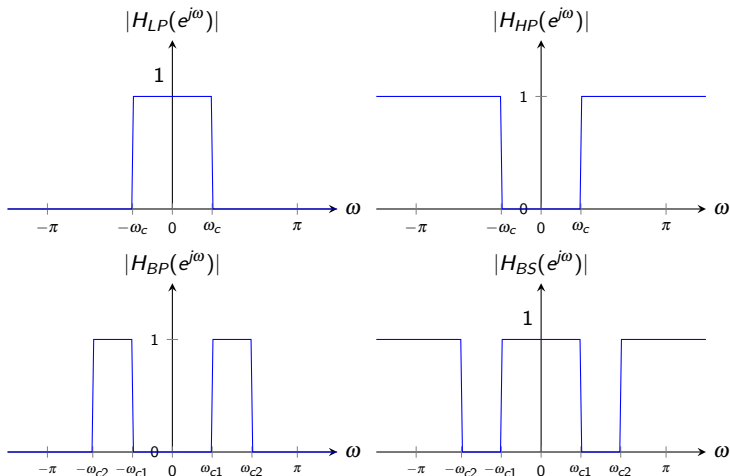
- 1 介绍
- 2 数字滤波器分类：基于幅度响应
 - 低通、高通、带通、带阻
 - 有界实传输函数
 - 全通滤波器
- 3 数字滤波器分类：基于相位响应
 - 零相位
 - 线性相位
 - 最大/小相位
- 4 数字滤波器分类：其他
- 5 数字滤波器设计方法
 - IIR 数字滤波器
 - 双线性变换
 - 谱变换
 - FIR 数字滤波器
 - 加窗冲激响应
 - 窗函数形状
 - 计算机辅助滤波器设计

理想幅度响应数字滤波器

- ◆ 数字滤波器：通过幅度谱选择不同频率的信号通过的 LTI 离散时间系统。
- ◆ 幅度响应的性质：
 - ◆ 通带：频率响应等于 1 的频率范围
 - ◆ 阻带：频率响应等于 0 的频率范围
- ◆ 截止频率： ω_c



四类理想低通滤波器



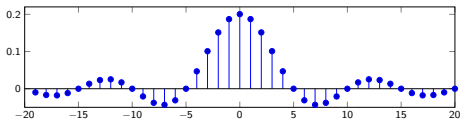
理想数字滤波器的实际实现问题

◆ 理想低通滤波器

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

◆ 理想低通滤波器的时域表示

$$\begin{aligned} h[n] &= IDFT\{H(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} \quad n = -\infty, \dots, \infty \end{aligned}$$



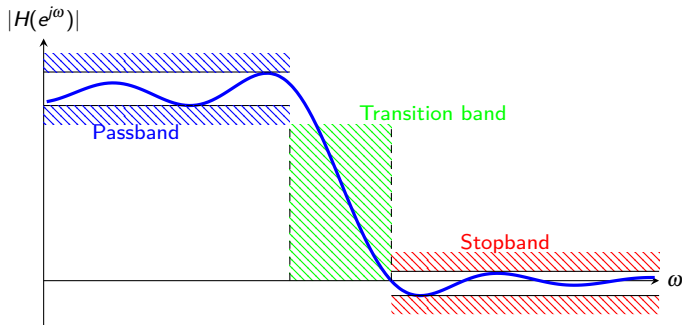
◆ 理想数字滤波器的实现：

- ◆ 双边无限长 ($n = -\infty, \dots, \infty$)
- ◆ 有理多项式无法实现（很难找到差分方程表示）
- ◆ 时域的性质很差：模糊、振铃效应等等

可实现的数字滤波器

可实现数字滤波器必须要对理想数字滤波器的指标加以放宽：

- ① 允许通带波纹 (ripples)
- ② 允许阻带波纹 (ripples)
- ③ 允许过渡带 (passband)



简单 FIR 低通数字滤波器

- ◆ 2 点滑动平均滤波器的冲击响应为

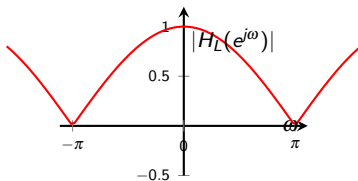
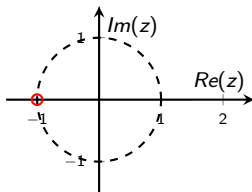
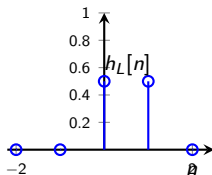
$$h_L[n] = \{1/2, 1/2\}, \quad n = 0, 1$$

- ◆ 对应的 z 变换为

$$H_L(z) = 1/2(1 + z^{-1}) = \frac{z+1}{2z}$$

- ◆ 频率响应为

$$H_L(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2} \cos(\omega/2)$$



简单 FIR 高通数字滤波器

- ◆ 2 点滑动平均滤波器的冲击响应为

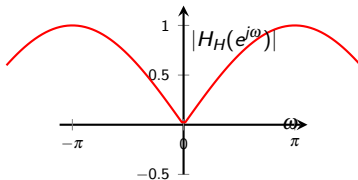
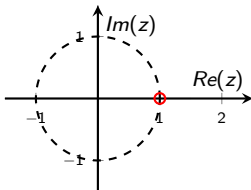
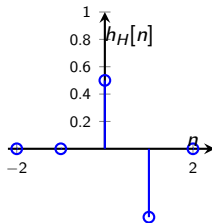
$$h_H[n] = \{1/2, -1/2\}, \quad n = 0, 1$$

- ◆ 对应的 z 变换为

$$H_H(z) = 1/2(1 - z^{-1}) = \frac{z-1}{2z}$$

- ◆ 频率响应为

$$H_H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega/2} \sin(\omega/2)$$



低通和高通数字滤波器

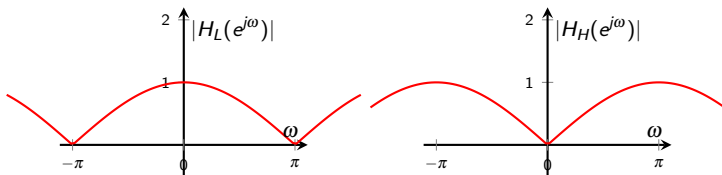
- ◆ 2 点滑动平均器与 2 点微分器之间的关系

$$h_L[n] = \{1/2, 1/2\} \quad h_H[n] = \{1/2, -1/2\}$$

i.e.

$$h_H[n] = (-1)^n h_L[n] \Rightarrow H_H(z) = H_L(-z)$$

- ◆ z-平面对应180 度旋转 \iff 频率响应具有 π 的相位延迟



截止频率及半功率点

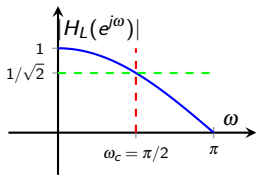
- 截止频率 ω_c 一般定义为**半功率点**，即

$$|H(e^{j\omega_c})|^2 = \frac{1}{2} \max_{\omega} \{ |H(e^{j\omega})|^2 \} \Rightarrow H = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{max}$$

- 对于 2 点滑动平均器, $H_{max} = 1$

$$|H_L(e^{j\omega_c})| = \cos(\omega_c/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

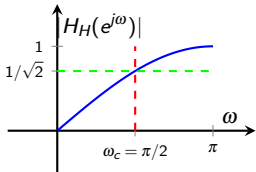
$$\Rightarrow \omega_c = \frac{\pi}{2}$$



- 对于 2 点微分器, $H_{max} = 1$

$$|H_H(e^{j\omega_c})| = \sin(\omega_c/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

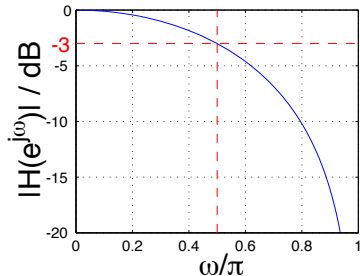
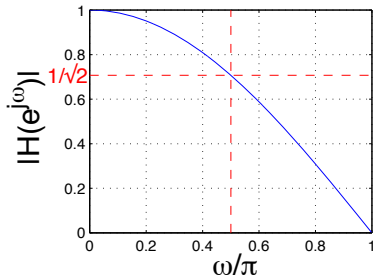
$$\Rightarrow \omega_c = \frac{\pi}{2}$$



-3dB 点

- ◆ 工程中，我们通常用分贝（dB）来描述滤波器的幅度响应

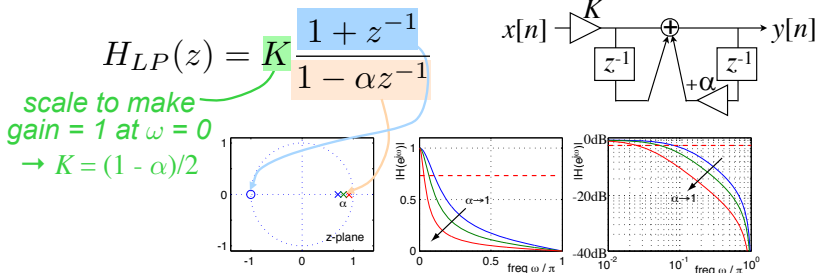
$$dB = 20 \log_{10}(\text{level}) = 10 \log_{10}(\text{power})$$



- ◆ 增益为 $0 \iff -\infty$ dB

简单 IIR 低通数字滤波器

IIR → feedback, zeros and poles,
conditional stability, $h[n]$ less useful



简单 IIR 低通数字滤波器的设计

◆ 一阶 IIR 低通传输函数

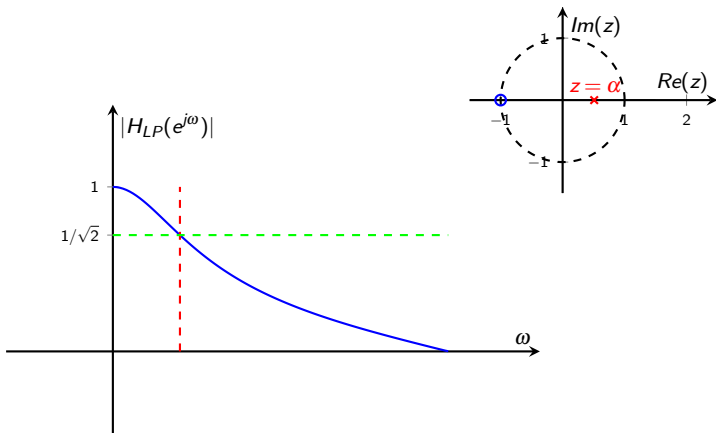
$$H_{LP}(z) = K \frac{1 + z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$$

◆ 若要设计截止频率为 ω_c 的滤波器，即半功率点在 ω_c 处，($K = \frac{1-\alpha}{2}$ 使 $\max = 1$)

$$\begin{aligned} |H_{LP}(e^{j\omega_c})|^2 &= \frac{\max}{2} \\ \Rightarrow \frac{(1-\alpha)^2}{4} \frac{(1+e^{-j\omega_c})(1+e^{j\omega_c})}{(1-\alpha e^{-j\omega_c})(1-\alpha e^{j\omega_c})} &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \cos \omega_c &= \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{1 - \sin \omega_c}{\cos \omega_c} \end{aligned}$$

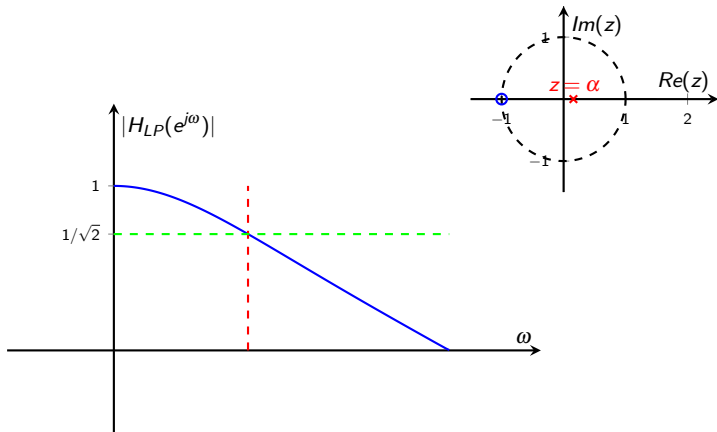
简单 IIR 低通数字滤波器的设计

$$\omega_c = \frac{1}{5}\pi \Rightarrow \alpha = \frac{1 - \sin \omega_c}{\cos \omega_c} = 0.50955$$



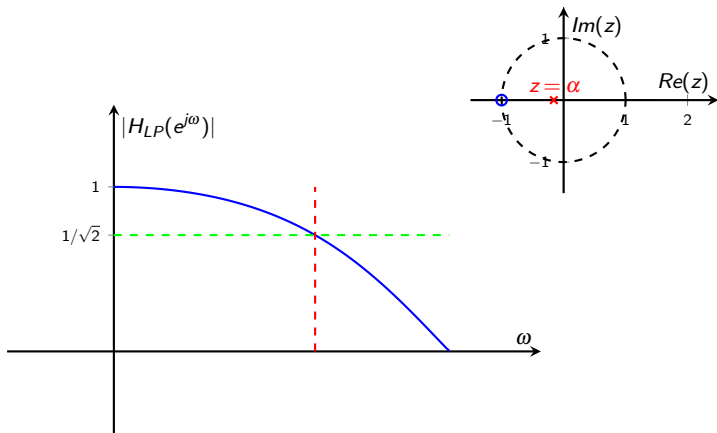
简单 IIR 低通数字滤波器的设计

$$\omega_c = \frac{2}{5}\pi \Rightarrow \alpha = \frac{1 - \sin \omega_c}{\cos \omega_c} = 0.15843$$



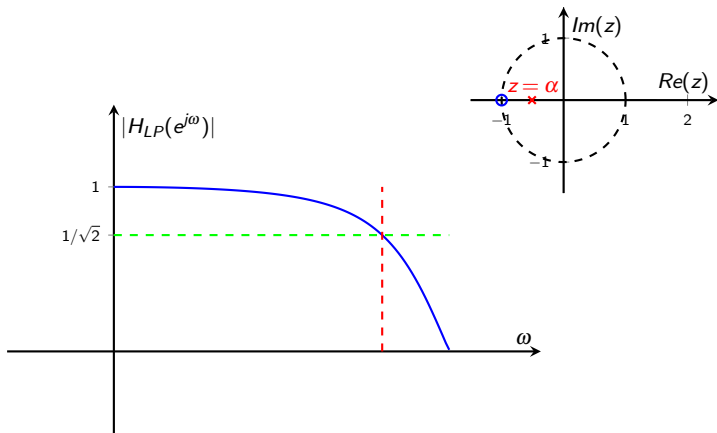
简单 IIR 低通数字滤波器的设计

$$\omega_c = \frac{3}{5}\pi \Rightarrow \alpha = \frac{1 - \sin \omega_c}{\cos \omega_c} = -0.15842$$



简单 IIR 低通数字滤波器的设计

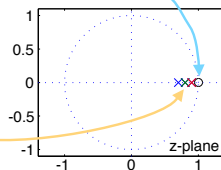
$$\omega_c = \frac{4}{5}\pi \Rightarrow \alpha = \frac{1 - \sin \omega_c}{\cos \omega_c} = -0.50954$$



简单 IIR 高通数字滤波器

$$H_{HP}(z) = K \frac{1 - z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$$

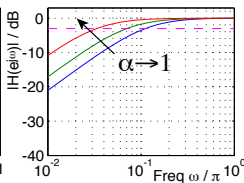
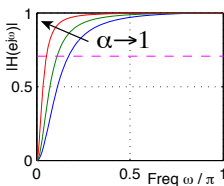
Pass $\omega = \pi \rightarrow H_{HP}(-1) = 1$
 $\rightarrow K = (1+\alpha)/2$



Design Equation:

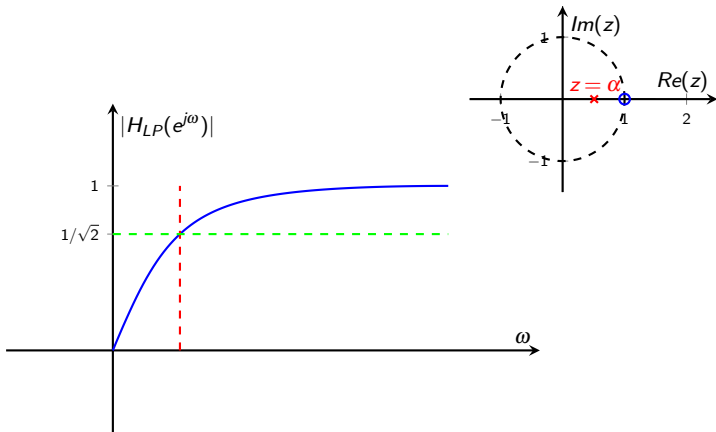
$$\alpha = \frac{1 - \sin \omega_c}{\cos \omega_c}$$

(again)



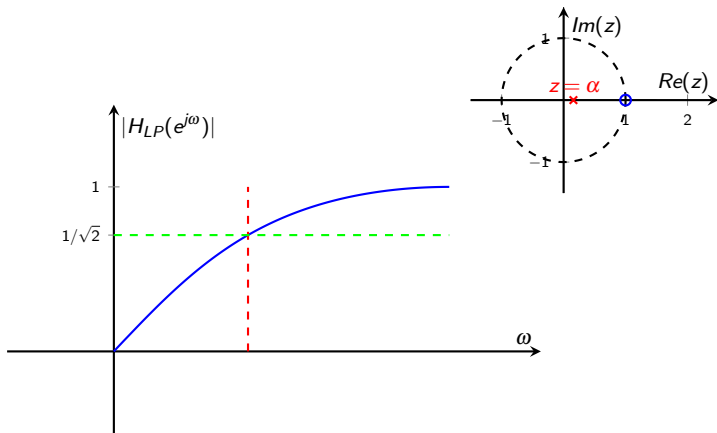
简单 IIR 高通数字滤波器设计

$$\omega_c = \frac{1}{5}\pi \Rightarrow \alpha = \frac{1 - \sin \omega_c}{\cos \omega_c} = 0.50955$$



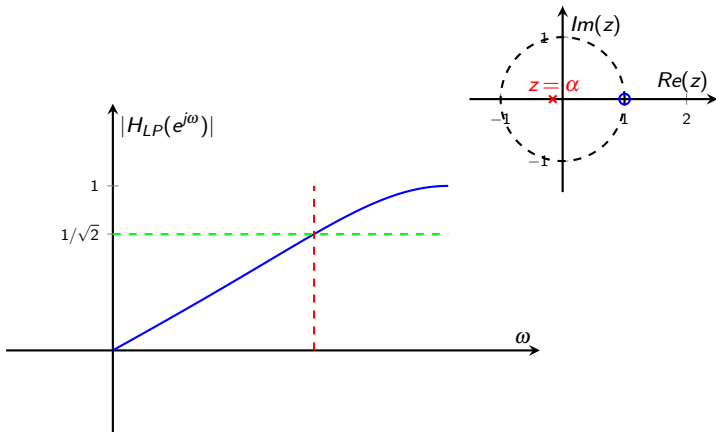
简单 IIR 高通数字滤波器设计

$$\omega_c = \frac{2}{5}\pi \Rightarrow \alpha = \frac{1 - \sin \omega_c}{\cos \omega_c} = 0.15843$$



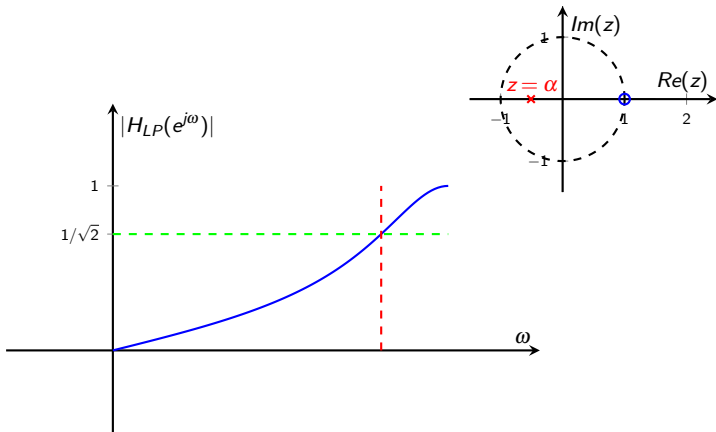
简单 IIR 高通数字滤波器设计

$$\omega_c = \frac{3}{5}\pi \Rightarrow \alpha = \frac{1 - \sin \omega_c}{\cos \omega_c} = -0.15842$$



简单 IIR 高通数字滤波器设计

$$\omega_c = \frac{4}{5}\pi \Rightarrow \alpha = \frac{1 - \sin \omega_c}{\cos \omega_c} = -0.50954$$



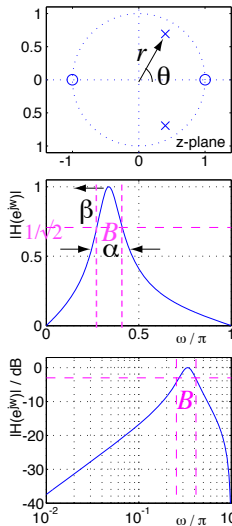
简单 IIR 带通数字滤波器

$$H_{BP}(z) = \frac{1-\alpha}{2} \frac{1-z^{-2}}{1-\beta(1+\alpha)z^{-1}+\alpha z^{-2}}$$

$$= K \frac{(1+z^{-1})(1-z^{-1})}{1-2r\cos\theta \cdot z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

where $r = \sqrt{\alpha}$ $\cos\theta = \frac{\beta(1+\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}$

Design $\left\{ \begin{array}{l} \text{Center freq } \omega_c = \cos^{-1} \beta \\ \text{3dB bandwidth } B = \cos^{-1} \left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \right) \end{array} \right.$

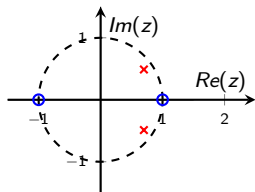
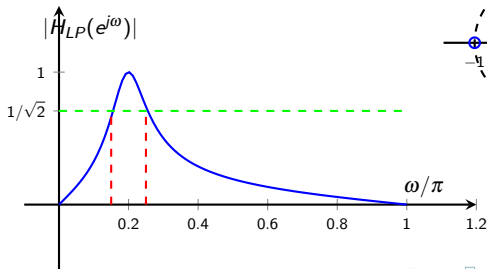


简单 IIR 带通数字滤波器设计

设计一个二阶的 IIR 带通滤波器，使得该滤波器的中心频率 $\omega_c = \frac{1}{5}\pi$ ，且通带带宽 (3dB 带宽) 为 0.1π .

$$B = 0.1\pi \Rightarrow \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} = \cos(0.1\pi) \Rightarrow \alpha = 0.7265$$

$$\omega_c = \frac{1}{5}\pi \Rightarrow \beta = \cos \omega_c = 0.80902$$

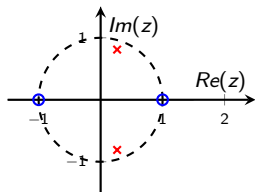
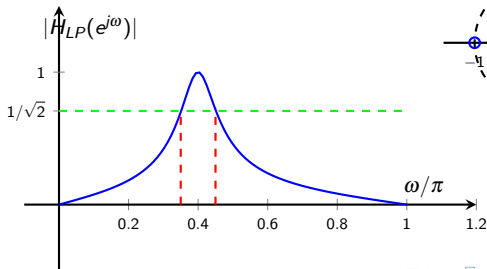


简单 IIR 带通数字滤波器设计

设计一个二阶的 IIR 带通滤波器，使得该滤波器的中心频率 $\omega_c = \frac{2}{5}\pi$ ，且通带带宽 (3dB 带宽) 为 0.1π .

$$B = 0.1\pi \Rightarrow \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} = \cos(0.1\pi) \Rightarrow \alpha = 0.7265$$

$$\omega_c = \frac{2}{5}\pi \Rightarrow \beta = \cos \omega_c = 0.30904$$

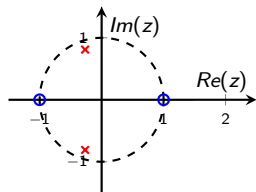
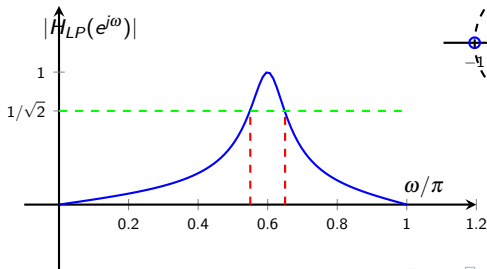


简单 IIR 带通数字滤波器设计

设计一个二阶的 IIR 带通滤波器，使得该滤波器的中心频率 $\omega_c = \frac{3}{5}\pi$ ，且通带带宽 (3dB 带宽) 为 0.1π .

$$B = 0.1\pi \Rightarrow \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \cos(0.1\pi) \Rightarrow \alpha = 0.7265$$

$$\omega_c = \frac{3}{5}\pi \Rightarrow \beta = \cos \omega_c = -0.30898$$

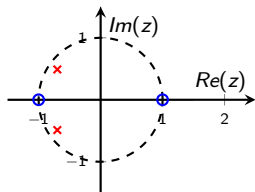
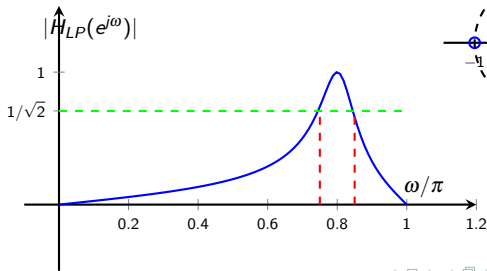


简单 IIR 带通数字滤波器设计

设计一个二阶的 IIR 带通滤波器，使得该滤波器的中心频率 $\omega_c = \frac{4}{5}\pi$ ，且通带带宽 (3dB 带宽) 为 0.1π .

$$B = 0.1\pi \Rightarrow \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \cos(0.1\pi) \Rightarrow \alpha = 0.7265$$

$$\omega_c = \frac{4}{5}\pi \Rightarrow \beta = \cos \omega_c = -0.80898$$

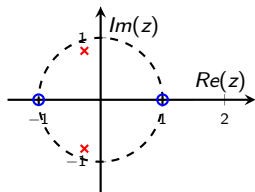
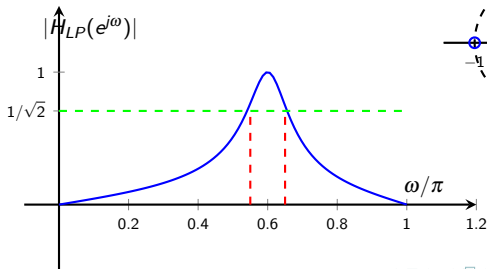


Design of IIR BandPass

设计一个二阶的 IIR 带通滤波器，使得该滤波器的中心频率 $\omega_c = \frac{3}{5}\pi$ ，且通带带宽 (3dB 带宽) 为 $\frac{1}{10}\pi$ 。

$$B = \frac{1}{10}\pi \Rightarrow \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \cos\left(\frac{1}{10}\pi\right) \Rightarrow \alpha = 0.691$$

$$\omega_c = \frac{3}{5}\pi \Rightarrow \beta = \cos \omega_c = -0.30902$$

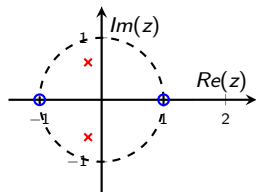
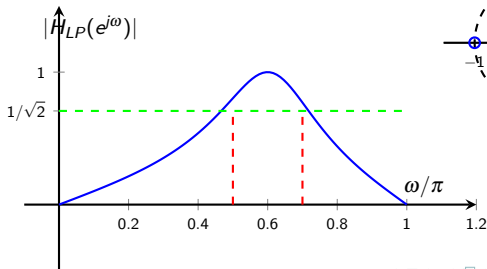


Design of IIR BandPass

设计一个二阶的 IIR 带通滤波器，使得该滤波器的中心频率 $\omega_c = \frac{3}{5}\pi$ ，且通带带宽 (3dB 带宽) 为 $\frac{2}{10}\pi$ 。

$$B = \frac{2}{10}\pi \Rightarrow \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \cos\left(\frac{2}{10}\pi\right) \Rightarrow \alpha = 0.41222$$

$$\omega_c = \frac{3}{5}\pi \Rightarrow \beta = \cos \omega_c = -0.30902$$

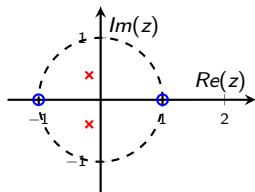
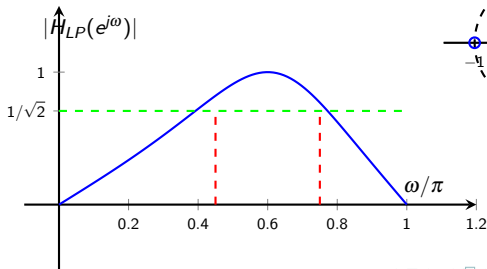


Design of IIR BandPass

设计一个二阶的 IIR 带通滤波器，使得该滤波器的中心频率 $\omega_c = \frac{3}{5}\pi$ ，且通带带宽 (3dB 带宽) 为 $\frac{3}{10}\pi$ 。

$$B = \frac{3}{10}\pi \Rightarrow \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \cos\left(\frac{3}{10}\pi\right) \Rightarrow \alpha = 0.19096$$

$$\omega_c = \frac{3}{5}\pi \Rightarrow \beta = \cos \omega_c = -0.30902$$



简单 IIR 带阻数字滤波器

二阶带阻滤波器,

$$H_{BS}(z) = \frac{1+\alpha}{2} \frac{1-2\beta z^{-1}+z^{-2}}{1-\beta(1+\alpha)z^{-1}+\alpha z^{-2}}$$

零点位置: $z = r_0 \cdot e^{\pm j\theta_0} \Rightarrow r_0 = 1, \cos \theta_0 = \beta$

极点位置: $z = r_s \cdot e^{\pm j\theta_s} \Rightarrow r_s = \sqrt{\alpha}, \cos \theta_s = \frac{\beta(1+\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}$

幅度响应:

$$|H_{BS}(e^{j\omega})|^2 = \frac{(1+\alpha)^2(\beta - \cos \omega)^2}{(1+\alpha)^2(\beta - \cos \omega)^2 + (1-\alpha)^2 \sin^2 \omega}$$

滤波器设计:

$$\omega_c = \cos^{-1} \beta \Rightarrow \beta = \cos \omega_c$$

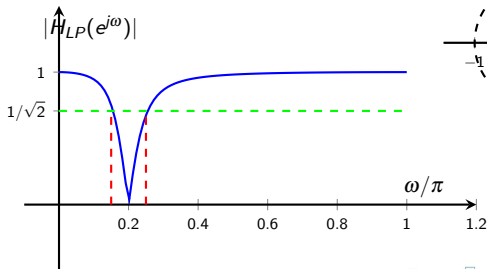
$$B = \cos^{-1} \left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \right) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\cos B} - \sqrt{\frac{1}{\cos^2 B} - 1}$$

简单 IIR 带阻数字滤波器设计

设计一个二阶的 IIR 带通滤波器，使得该滤波器的中心频率 $\omega_c = \frac{1}{5}\pi$ ，且通带带宽 (3dB 带宽) 为 0.1π .

$$B = 0.1\pi \Rightarrow \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} = \cos(0.1\pi) \Rightarrow \alpha = 0.7265$$

$$\omega_c = \frac{1}{5}\pi \Rightarrow \beta = \cos \omega_c = 0.80902$$

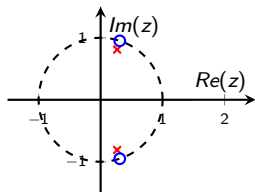
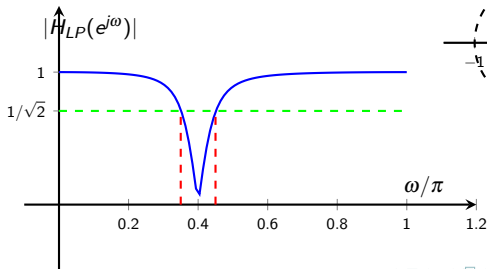


简单 IIR 带阻数字滤波器设计

设计一个二阶的 IIR 带通滤波器，使得该滤波器的中心频率 $\omega_c = \frac{2}{5}\pi$ ，且通带带宽 (3dB 带宽) 为 0.1π .

$$B = 0.1\pi \Rightarrow \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} = \cos(0.1\pi) \Rightarrow \alpha = 0.7265$$

$$\omega_c = \frac{2}{5}\pi \Rightarrow \beta = \cos \omega_c = 0.30904$$

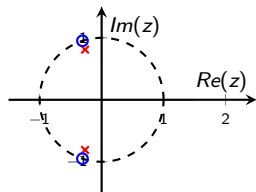
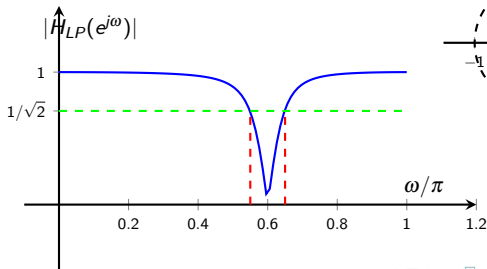


简单 IIR 带阻数字滤波器设计

设计一个二阶的 IIR 带通滤波器，使得该滤波器的中心频率 $\omega_c = \frac{3}{5}\pi$ ，且通带带宽 (3dB 带宽) 为 0.1π .

$$B = 0.1\pi \Rightarrow \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \cos(0.1\pi) \Rightarrow \alpha = 0.7265$$

$$\omega_c = \frac{3}{5}\pi \Rightarrow \beta = \cos \omega_c = -0.30898$$

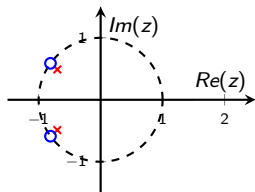
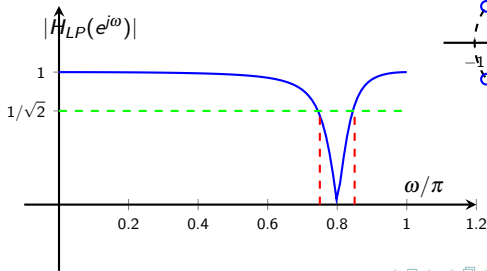


简单 IIR 带阻数字滤波器设计

设计一个二阶的 IIR 带通滤波器，使得该滤波器的中心频率 $\omega_c = \frac{4}{5}\pi$ ，且通带带宽 (3dB 带宽) 为 0.1π .

$$B = 0.1\pi \Rightarrow \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \cos(0.1\pi) \Rightarrow \alpha = 0.7265$$

$$\omega_c = \frac{4}{5}\pi \Rightarrow \beta = \cos \omega_c = -0.80898$$

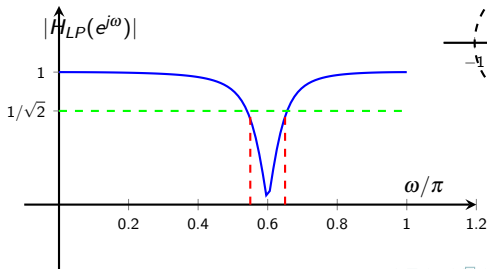


Design of IIR Bandstop

设计一个二阶的 IIR 带阻滤波器，使得该滤波器的中心频率 $\omega_c = \frac{3}{5}\pi$ ，且通带带宽 (3dB 带宽) 为 $\frac{1}{10}\pi$ 。

$$B = \frac{1}{10}\pi \Rightarrow \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \cos\left(\frac{1}{10}\pi\right) \Rightarrow \alpha = 0.691$$

$$\omega_c = \frac{3}{5}\pi \Rightarrow \beta = \cos \omega_c = -0.30902$$

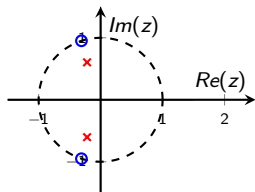
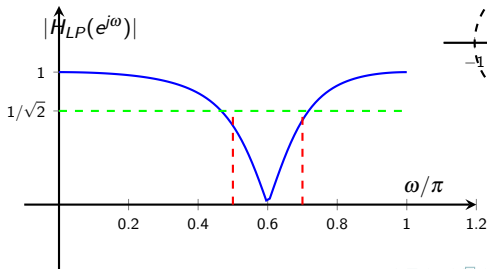


Design of IIR Bandstop

设计一个二阶的 IIR 带阻滤波器，使得该滤波器的中心频率 $\omega_c = \frac{3}{5}\pi$ ，且通带带宽 (3dB 带宽) 为 $\frac{2}{10}\pi$ 。

$$B = \frac{2}{10}\pi \Rightarrow \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \cos(\frac{2}{10}\pi) \Rightarrow \alpha = 0.41222$$

$$\omega_c = \frac{3}{5}\pi \Rightarrow \beta = \cos \omega_c = -0.30902$$

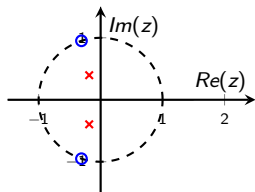
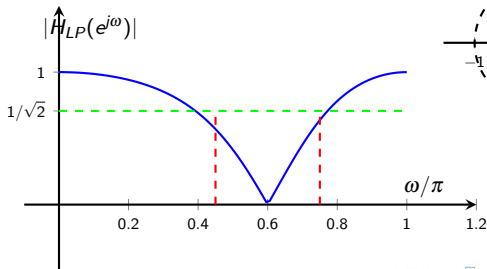


Design of IIR Bandstop

设计一个二阶的 IIR 带阻滤波器，使得该滤波器的中心频率 $\omega_c = \frac{3}{5}\pi$ ，且通带带宽 (3dB 带宽) 为 $\frac{3}{10}\pi$ 。

$$B = \frac{3}{10}\pi \Rightarrow \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \cos\left(\frac{3}{10}\pi\right) \Rightarrow \alpha = 0.19096$$

$$\omega_c = \frac{3}{5}\pi \Rightarrow \beta = \cos \omega_c = -0.30902$$



Outline

- 1 介绍
- 2 数字滤波器分类：基于幅度响应
 - 低通、高通、带通、带阻
 - 有界实传输函数
 - 全通滤波器
- 3 数字滤波器分类：基于相位响应
 - 零相位
 - 线性相位
 - 最大/小相位
- 4 数字滤波器分类：其他
- 5 数字滤波器设计方法
 - IIR 数字滤波器
 - 双线性变换
 - 谱变换
 - FIR 数字滤波器
 - 加窗冲激响应
 - 窗函数形状
 - 计算机辅助滤波器设计

有界实 (BR) 传输函数

- ◆ 因果稳定实系统的传输函数满足如下条件:

$$|H(e^{j\omega})| \leq 1 \text{ for all values of } \omega$$

那么称为有界实 (BR) 传输函数

- ◆ 若用 BR 传输函数 $H(z)$ 描述一个数字滤波器的输入和输出分别是 $x[n]$ 和 $y[n]$, 那么对应的频域关系为 $|Y(e^{j\omega})|^2 \leq |X(e^{j\omega})|^2$
- ◆ 两边求从 $-\pi$ 到 π 的积分, 再根据 Parseval 定理, 得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2[n] \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$$

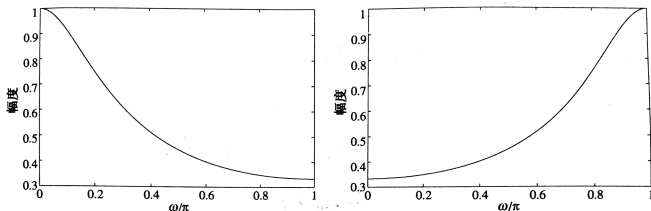
- ◆ 对于所有有限能量的输入, 其输出的能量都不会大于输入的能量, 表明用 BR 传输函数表示的数字滤波器可以被看成是无源结构;
- ◆ 如果 $|H(e^{j\omega})| = 1$ 表示输出能量等于输入能量, 说明这样的数字滤波器是无损的, 而这样的传输函数被称为是无损有界 (LBR) 传输函数。

有界实 (BR) 传输函数

- ◆ BR 和 LBR 传输函数对于那些稀疏敏感性较低的数字滤波器的实现是非常关键的。
- ◆ 因果稳定系统传输函数为

$$H(z) = \frac{K}{1 - \alpha z^{-1}}, 0 < |\alpha| < 1$$

当 $K = \pm(1 - \alpha)$ 时, 该传输函数为 BR 函数。

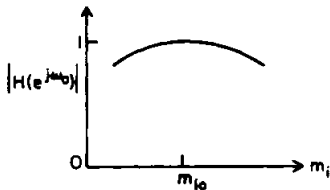
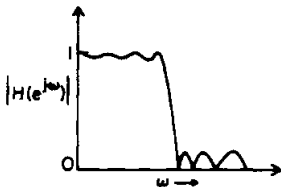


有界实 (BR) 传输函数

- ◆ BR 和 LBR 传输函数对于那些稀疏敏感性较低的数字滤波器的实现是非常关键的。
- ◆ 乘法器系数量化值 m_i , 实际值 m_{i0} , 根据 BR 条件可以知道

$$\left. \frac{\partial |H(e^{j\omega_k})|}{\partial m_i} \right|_{m_i=m_{i0}} = 0$$

当这些 ω_k 间隔较小时, 那么可以推断通带内其他频率点上的幅度函数的灵敏度很低。



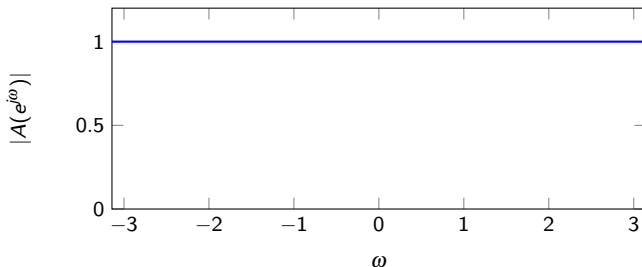
Outline

- 1 介绍
- 2 数字滤波器分类：基于幅度响应
 - 低通、高通、带通、带阻
 - 有界实传输函数
 - 全通滤波器
- 3 数字滤波器分类：基于相位响应
 - 零相位
 - 线性相位
 - 最大/小相位
- 4 数字滤波器分类：其他
- 5 数字滤波器设计方法
 - IIR 数字滤波器
 - 双线性变换
 - 谱变换
 - FIR 数字滤波器
 - 加窗冲激响应
 - 窗函数形状
 - 计算机辅助滤波器设计

全通传输函数

- ◆ 对于任意的频率点，传输函数 $A(z)$ 的幅度响应都为 1，即

$$|A(e^{j\omega})| = 1, \quad \forall \omega$$



实系统全通传输函数的性质

- ◆ $h[n]$ 为实数，那么根据 DTFT 变换的对称性质

$$A^*(e^{j\omega}) = A(e^{-j\omega})$$

- ◆ $z = e^{j\omega}$ 带入上式

$$|A(e^{j\omega})|^2 = A(e^{j\omega})A(e^{-j\omega}) = A(z)A(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} = 1$$

- ◆ 假设传输函数 $A(z)$ 具有如下形式

$$A(z) = \frac{\sum_{k=0}^M p_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N d_k z^{-k}} = \frac{z^{-M} \sum_{k=0}^M p_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^N d_k z^{-k}}$$
$$A(z^{-1}) = \frac{\sum_{k=0}^M p_k z^k}{\sum_{k=0}^N d_k z^k} = \frac{z^M \sum_{k=0}^M p_k z^{k-M}}{\sum_{k=0}^N d_k z^k}$$

实系统全通传输函数的性质

- ◆ 分子分母阶数相同: $M = N$
- ◆ 对于任意的 k , 对应 z^k 的系数相同, 即 $p_{M-k} = d_k$

$$A(z)A(z^{-1}) = \frac{z^{-M} \sum_{k=0}^M p_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^N d_k z^{-k}} \cdot \frac{z^M \sum_{k=0}^M p_k z^{k-M}}{\sum_{k=0}^N d_k z^k} = 1$$

实系统全通传输函数的性质

- ◆ 分子分母阶数相同: $M = N$
- ◆ 对于任意的 k , 对应 z^k 的系数相同, 即 $p_{M-k} = d_k$

$$A(z)A(z^{-1}) = \frac{z^{-M} \sum_{k=0}^M p_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^N d_k z^{-k}} \cdot \frac{z^M \sum_{k=0}^M p_k z^{k-M}}{\sum_{k=0}^N d_k z^k} = 1$$

- ◆ 对于 M 阶全通传输函数 $A_M(z)$ 必然满足如下形式:

$$A_M(z) = \pm \frac{d_M + d_{M-1}z^{-1} + \dots + d_1z^{-M+1} + z^{-M}}{1 + d_1z^{-1} + \dots + d_{M-1}z^{-M+1} + d_Mz^{-M}}$$

实系统全通传输函数的性质

- ◆ 全通函数的零极点在 z 平面上是镜像对称的 (Mirror-image symmetry)

证明.

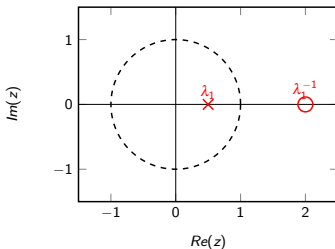
定义

$$D_M(z) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{M-1} z^{-M+1} + d_M z^{-M}$$

那么

$$A_M(z) = \pm \frac{z^{-M} D_M(z^{-1})}{D_M(z)}$$

假设存在极点 $z = \lambda_0 = r e^{j\phi}$, 那么必然存在零点 $z = \lambda_0^{-1} = \frac{1}{r} e^{-j\phi}$. □



$$A_M(z) = \pm \prod_{i=1}^M \frac{-\lambda_i^* + z^{-1}}{1 - \lambda_i z^{-1}}$$

实系统全通传输函数的性质

- ◆ 全通函数的零极点在 z 平面上是**镜像对称的** (Mirror-image symmetry)

证明.

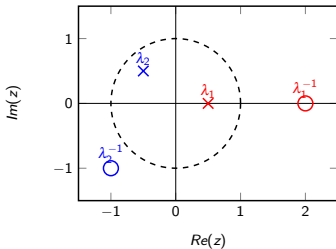
定义

$$D_M(z) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{M-1} z^{-M+1} + d_M z^{-M}$$

那么

$$A_M(z) = \pm \frac{z^{-M} D_M(z^{-1})}{D_M(z)}$$

假设存在极点 $z = \lambda_0 = re^{j\phi}$, 那么必然存在零点 $z = \lambda_0^{-1} = \frac{1}{r}e^{-j\phi}$ 。



$$A_M(z) = \pm \prod_{i=1}^M \frac{-\lambda_i^* + z^{-1}}{1 - \lambda_i z^{-1}}$$

实系统全通传输函数的性质

- ◆ 全通函数的零极点在 z 平面上是镜像对称的 (Mirror-image symmetry)

证明.

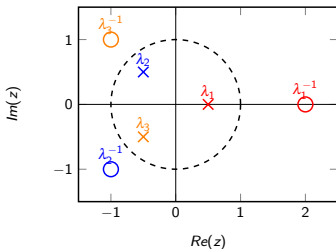
定义

$$D_M(z) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{M-1} z^{-M+1} + d_M z^{-M}$$

那么

$$A_M(z) = \pm \frac{z^{-M} D_M(z^{-1})}{D_M(z)}$$

假设存在极点 $z = \lambda_0 = r e^{j\phi}$, 那么必然存在零点 $z = \lambda_0^{-1} = \frac{1}{r} e^{-j\phi}$.



$$A_M(z) = \pm \prod_{i=1}^M \frac{-\lambda_i^* + z^{-1}}{1 - \lambda_i z^{-1}}$$

全通传输函数的性质：幅度

- ◆ 全通传输函数可以表示为：

$$A_M(z) = \pm \prod_{i=1}^M \frac{-\lambda_i^* + z^{-1}}{1 - \lambda_i z^{-1}}$$

- ◆ 考虑一对零极点（镜像对称）

$$A(z) = \frac{-\lambda^* + z^{-1}}{1 - \lambda z^{-1}}$$

- ◆ 幅度 ($z = |z|e^{j\omega}$ 且 $\lambda = re^{j\phi}$)

$$|A(z)|^2 = \frac{1 - 2r|z|\cos(\omega - \phi) + r^2|z|^2}{|z|^2 - 2r|z|\cos(\omega - \phi) + r^2} = 1 - \frac{(1 - r^2)(|z|^2 - 1)}{|z|^2 - 2r|z|\cos(\omega - \phi) + r^2}$$

- ◆ 对于因果稳定系统来说（极点位于单位圆内 $r < 1$ ）

$$|A(z)|^2 \begin{cases} < 1, & |z| > 1 \\ = 1, & |z| = 1 \\ > 1, & |z| < 1 \end{cases}$$

全通传输函数的性质：相位

实系统全通传输函数可以写成如下形式 ($|A(e^{j\omega})| = 1$)

$$A(e^{j\omega}) = e^{j\theta(\omega)}$$

- ◆ 相位响应 $\theta(\omega)$ 为单调递减函数；
- ◆ 相位响应 $\theta(\omega)$ 为非正函数；
- ◆ M 阶稳定实系数全通传输函数的群延迟 $\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$ 满足

$$\int_0^\pi \tau_g(\omega) d\omega = M\pi$$

相位响应的单调递减性质

- ◆ 考虑一阶因果稳定实系数全通函数

$$A(z) = \frac{-\lambda^* + z^{-1}}{1 - \lambda z^{-1}}$$

- ◆ 频率响应为 (令 $z = e^{j\omega}$)

$$A(e^{j\omega}) = \frac{-\lambda^* + e^{-j\omega}}{1 - \lambda e^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \left[\frac{1 - r e^{j(\omega - \phi)}}{1 - r e^{-j(\omega - \phi)}} \right]$$

- ◆ 相位函数为

$$\theta(\omega) = -\omega - 2 \arctan \left[\frac{r \sin(\omega - \phi)}{1 - r \cos(\omega - \phi)} \right]$$

$$\frac{d\theta}{d\omega} = -\frac{(1 - r^2)}{|1 + r e^{-j(\omega - \phi)}|^2} < 0, \forall r < 1$$

相位响应的非正性质

- ◆ 考虑一阶因果稳定实系数全通函数 ($\lambda = re^{j\phi}, r < 1$)

$$A(z) = \frac{-\lambda^* + z^{-1}}{1 - \lambda z^{-1}}$$

- ◆ 直流响应, $A(e^{j0}) = 1$, 所以 $\theta(0) = 0$

- ◆ 相位函数单调递减 $\frac{d\theta}{d\omega} < 0$,

$$\theta(\omega) = \int_0^\pi \frac{d\theta}{d\omega} d\omega + \theta(0) \leq 0$$

群延迟性质

- ◆ 考虑一阶因果稳定实系数全通函数 ($\lambda = re^{j\phi}, r < 1$)

$$A(z) = \frac{-\lambda^* + z^{-1}}{1 - \lambda z^{-1}}$$

- ◆ 群延迟为 (参见第三章)

$$\begin{aligned} \tau_1(\omega) &= -\operatorname{Re} \left[z \frac{d \ln A(z)}{dz} \right] \bigg|_{z=e^{j\omega}} = -\operatorname{Re} \left[z \left(\frac{-\lambda^*}{1 - \lambda^* z} - \frac{1}{z - \lambda} \right) \right] \bigg|_{z=e^{j\omega}} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \phi)} > 0 \end{aligned}$$

- ◆ 等式两边积分

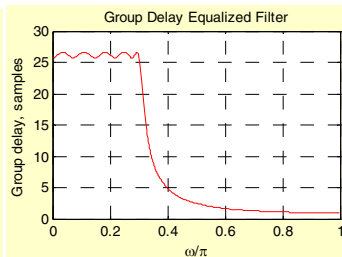
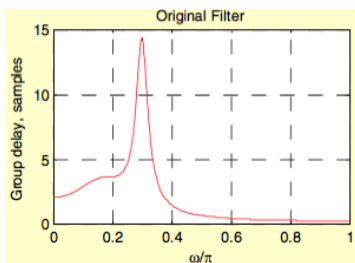
$$\int_0^\pi \tau_1(\omega) d\omega = \left[2 \arctan \left(\frac{r+1}{r-1} \tan \frac{\phi - \omega}{2} \right) \right]_0^\pi = \pi$$

- ◆ 对于任意 M 阶稳定实系数全通传输函数

$$A(z) = \prod_{i=1}^M A_i(z) \Rightarrow \int_0^\pi \tau_g(\omega) d\omega = M\pi$$

应用：延迟均衡器

- Since $|A(e^{j\omega})| = 1$, we have $|G(z)A(e^{j\omega})| = |G(e^{j\omega})|$.
- Overall group delay is given by the sum of the group delays of $G(z)$ and $A(z)$.



Outline

- 1 介绍
- 2 数字滤波器分类：基于幅度响应
 - 低通、高通、带通、带阻
 - 有界实传输函数
 - 全通滤波器
- 3 数字滤波器分类：基于相位响应
 - 零相位
 - 线性相位
 - 最大/小相位
- 4 数字滤波器分类：其他
- 5 数字滤波器设计方法
 - IIR 数字滤波器
 - 双线性变换
 - 谱变换
 - FIR 数字滤波器
 - 加窗冲激响应
 - 窗函数形状
 - 计算机辅助滤波器设计

Outline

- 1 介绍
- 2 数字滤波器分类：基于幅度响应
 - 低通、高通、带通、带阻
 - 有界实传输函数
 - 全通滤波器
- 3 数字滤波器分类：基于相位响应
 - 零相位
 - 线性相位
 - 最大/小相位
- 4 数字滤波器分类：其他
- 5 数字滤波器设计方法
 - IIR 数字滤波器
 - 双线性变换
 - 谱变换
 - FIR 数字滤波器
 - 加窗冲激响应
 - 窗函数形状
 - 计算机辅助滤波器设计

零相移传输函数

◆ 零相移传输函数

$$\theta(\omega) = 0, \quad \forall \omega$$

- ◆ 零相移滤波器不会使输入信号分量的相位产生失真
- ◆ 传输函数是实数、且为非负的

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j0} = |H(e^{j\omega})|$$

◆ 零相移传输函数的形式：

- ◆ 令 $H(z)$ 为实系数有理 Z 变换，在单位圆上没有极点，即 $|H(e^{j\omega})| < \infty$ ；
- ◆ 那么 $F(z) = H(z)H(z^{-1})$ 就是一个零相移传输函数（实序列 DTFT 变换的对称性）

$$\begin{aligned} F(e^{j\omega}) &= F(z)|_{z=e^{j\omega}} \\ &= H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) \\ &= |H(e^{j\omega})|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

零相移传输函数的零极点

- ◆ 零相移传输函数具有形式

$$F(z) = H(z)H(z^{-1})$$

- ◆ 零极点分析：

- ① 假设 $z = v$ 为传输函数 $H(z)$ 的零点（或者极点）
- ② $H(z)$ 中必然存在因子

$$z - v$$

- ③ $H(z^{-1})$ 中必然存在因子

$$\frac{1}{z} - v$$

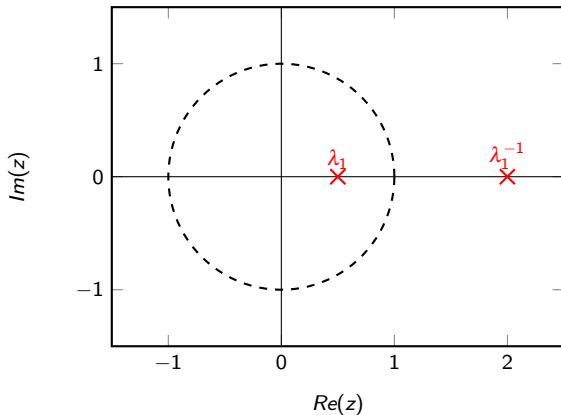
- ④ $z = \frac{1}{v}$ 也必然是 $H(z^{-1})$ 的零点（或者极点）

- ⑤ 那么 $z = v$ 和 $z = 1/v$ 都将是零相移传输函数 $F(z) = H(z)H(z^{-1})$ 的零点（或者极点）

- ◆ 零相移传输函数的零点（或者极点）是**镜像对称的**。

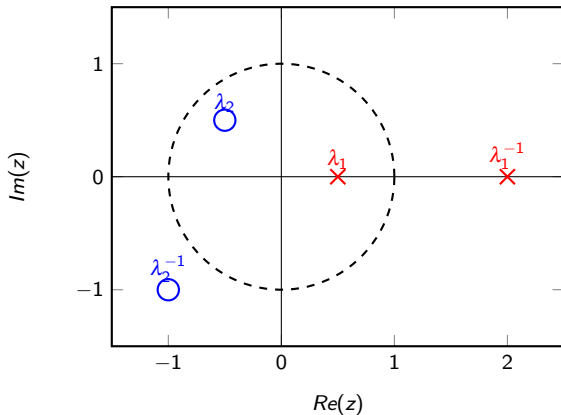
零相移传输函数的零极点

零相移滤波器 $F(z)$ 的零点和极点关于单位圆镜像对称的



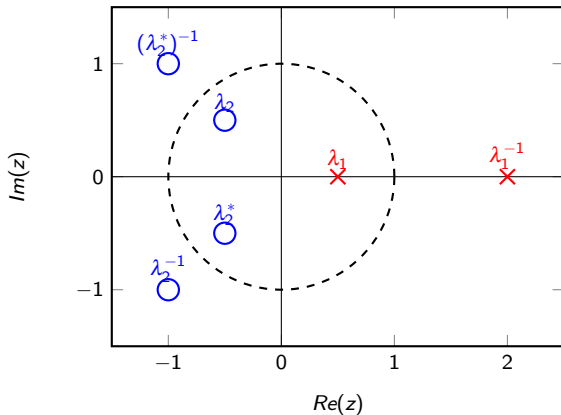
零相移传输函数的零极点

零相移滤波器 $F(z)$ 的零点和极点关于单位圆镜像对称的



零相移传输函数的零极点

零相移滤波器 $F(z)$ 的零点和极点关于单位圆镜像对称的



零相移传输函数的形式

- ◆ 不失一般性，假设零相移传输函数 $F(z) = H(z)H(z^{-1})$ ，且

$$H(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N} \Rightarrow G(z) = H(z^{-1}) = 1 + a_1 z + \cdots + a_N z^N$$

- ◆ 对应冲激响应序列

$$\left. \begin{aligned} h[n] &= \{1, a_1, \cdots, a_N\}, & n &= 0, 1, \dots, N \\ g[n] &= \{a_N, a_{N-1}, \cdots, 1\}, & n &= -N, -N+1, \dots, 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h[n] = g[-n]$$

- ◆ 另外，零相移传输函数对应的冲激响应序列为

$$\begin{aligned} f[n] &= h[n] \otimes g[n] \Rightarrow \\ f[-n] &= h[-n] \otimes g[-n] = g[n] \otimes h[n] = f[n] \end{aligned}$$

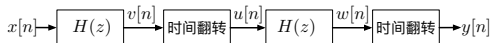
- ◆ 零相移传输函数 $F(z)$ 必然满足如下形式

$$F(z) = \sum_{l=0}^M b_l (z^l + z^{-l})$$

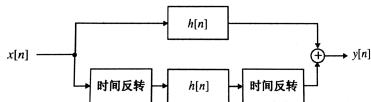
- ◆ 零相移传输函数 $F(z)$ 是非因果的，所以实际系统不可能实时的实现。

零相移滤波器的非实时处理

◆ 方法一：



◆ 方法二：



TIPS

对于实数序列来说：

时域反转： $x[n] \rightarrow x[-n]$

频域共轭： $X(e^{j\omega}) \rightarrow X^*(e^{j\omega})$

零相移滤波器的设计

- ① 根据需求设计幅度响应：

$$|H(e^{j\omega})|^2$$

- ② 替换 $\omega = \frac{1}{j} \ln z$, 或者 $(z + z^{-1})/2 = \cos \omega$

$$H(z)H(z^{-1}) = |H(e^{j\omega})|^2|_{\omega=\frac{1}{j} \ln z}$$

- ③ 选择一半的零点和极点实现 $H(z)$ 。

例子

若要设计幅度谱为如下形式的零相移滤波器：

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{4(1.09 + 0.6 \cos \omega)(1.16 - 0.8 \cos \omega)}{(1.04 - 0.4 \cos \omega)(1.25 + \cos \omega)}$$

那么将 $\cos \omega = (z + z^{-1})/2$ 带入到上式中得到

$$\begin{aligned} H(z)H(z^{-1}) &= \frac{4(1.09 + 0.3(z + z^{-1}))(1.16 - 0.4(z + z^{-1}))}{(1.04 - 0.2(z + z^{-1}))(1.25 + 0.5(z + z^{-1}))} \\ &= \frac{4(1 + 0.3z^{-1})(1 + 0.3z)(1 - 0.4z^{-1})(1 - 0.4z)}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.2z)(1 + 0.5z^{-1})(1 + 0.5z)} \end{aligned}$$

那么，该传输函数具有与 $H(e^{j\omega})$ 相同的幅度谱，且

- 极点： $z = \{0.2, 5, -0.5, -2\}$
- 零点： $z = \{-0.3, -10/3, 0.4, 2.5\}$

例子

挑选出稳定的极点

$$z = \{ 0.2, 5, -0.5, -2 \}$$

然后挑选一半的零点（一对镜像对称的零点只能选一次），可以得到四种不同的组合

$$z = \{-0.3, 0.4\}, \text{ or } z = \{-0.3, 2.5\} \text{ or } z = \{-10/3, 0.4\} \text{ or } z = \{-10/3, 2.5\}$$

对应的传输函数为

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{2(1+0.3z^{-1})(1-0.4z^{-1})}{(1-0.2z^{-1})(1+0.5z^{-1})} & H(z) &= \frac{2(1+0.3z^{-1})(0.4-z^{-1})}{(1-0.2z^{-1})(1+0.5z^{-1})} \\ H(z) &= \frac{2(0.3+z^{-1})(1-0.4z^{-1})}{(1-0.2z^{-1})(1+0.5z^{-1})} & H(z) &= \frac{2(0.3+z^{-1})(0.4-z^{-1})}{(1-0.2z^{-1})(1+0.5z^{-1})} \end{aligned}$$

Outline

- 1 介绍
- 2 数字滤波器分类：基于幅度响应
 - 低通、高通、带通、带阻
 - 有界实传输函数
 - 全通滤波器
- 3 数字滤波器分类：基于相位响应
 - 零相位
 - 线性相位
 - 最大/小相位
- 4 数字滤波器分类：其他
- 5 数字滤波器设计方法
 - IIR 数字滤波器
 - 双线性变换
 - 谱变换
 - FIR 数字滤波器
 - 加窗冲激响应
 - 窗函数形状
 - 计算机辅助滤波器设计

线性相位传输函数

- ◆ 最常见的一类线性相位滤波器的频率响应为（全频域相位响应是线性的）

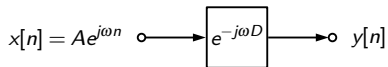
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega D}$$

- ◆ 幅度和相位延迟：

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \quad \tau(\omega) = D$$

输入输出关系

线性相位系统的输入输出关系



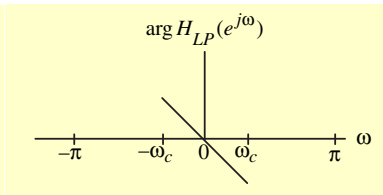
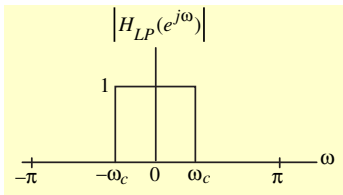
$$y[n] = Ae^{-j\omega D} e^{j\omega n} = Ae^{j\omega(n-D)}$$

- ◆ 如果 D 为整数, $y[n]$ 仅仅是 $x[n]$ 延迟 D 个样本后的结果
- ◆ 如果 D 不为整数 r , $y[n]$ 与 $x[n]$ 就不一样

线性相位传输函数

如果才能保证信号通过滤波器之后幅度和相位都不失真 (undistorted)，那么在通带内 (pass-band)

- 幅度响应 (magnitude response) = 1
- 相位响应 (phase response) 为线性的



线性相位滤波器的例子

线性相位理想低通滤波器

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0}, & 0 < |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

根据 DTFT 变换的频移性质，可以知道该滤波器的冲击响应为

$$h_{LP}[n] = \frac{\sin \omega_c(n - n_0)}{\pi(n - n_0)}, -\infty < n < \infty$$

非因果，且双边无限长，故而不能实现

截断

需要将无限长序列**截断**(Truncation) 成有限长序列

$$\hat{h}_{LP}[n] = \frac{\sin \omega_c(n - n_0)}{\pi(n - n_0)}, 0 \leq n \leq N$$

得到 $N+1$ 长度的因果有限长滤波器。

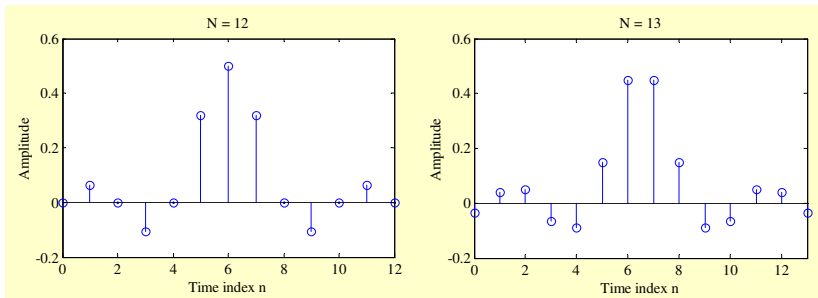
截断

需要将无限长序列**截断**(Truncation) 成有限长序列

$$\hat{h}_{LP}[n] = \frac{\sin \omega_c(n - n_0)}{\pi(n - n_0)}, 0 \leq n \leq N$$

得到 $N+1$ 长度的因果有限长滤波器。

若线性相位, n_0 需为 $N+1$ 点长序列的中心 $n_0 = \begin{cases} N/2, & N \text{ 为偶数} \\ (N-1)/2, & N \text{ 为奇数} \end{cases}$



零相位和线性相位传输函数之间的关系

可以发现线性相位系统的冲击响应也具有对称性质，其频率响应可以表示为

$$\hat{H}_{LP}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N \hat{h}_{LP}[n] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega N/2} \tilde{H}_{LP}(\omega)$$

- $\tilde{H}_{LP}(\omega)$ 为零相位响应 / 幅度响应
- $e^{-j\omega N/2}$ 为线性相位响应

线性相位 FIR 传输函数的形式

- ◆ 线性相位系统的频率响应必然有如下形式

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\theta(\omega)} |H(e^{j\omega})| = e^{j(c\omega + \beta)} \tilde{H}(\omega)$$

其中 $\tilde{H}(\omega)$ 为**零相位响应** $\Rightarrow \tilde{H}(\omega) \in \mathbb{R}_+$.

- ◆ 实序列的 DTFT 变换是共轭对称的

$$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$$

那么

$$\left. \begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= |\tilde{H}(\omega)| \\ |H^*(e^{-j\omega})| &= |\tilde{H}(-\omega)| \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\tilde{H}(\omega)| = |\tilde{H}(-\omega)| \Rightarrow \tilde{H}(\omega) = \pm \tilde{H}(-\omega)$$

- ◆ 取正号: $\tilde{H}(\omega) = \tilde{H}(-\omega)$, 那么 $\tilde{H}(\omega)$ 为偶函数;
- ◆ 取负号: $\tilde{H}(\omega) = -\tilde{H}(-\omega)$, 那么 $\tilde{H}(\omega)$ 为奇函数;

线性相位 FIR 传输函数的形式 1

- ◆ $\tilde{H}(\omega)$ 为偶函数, $\tilde{H}(\omega) = \tilde{H}(-\omega)$

$$\left. \begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{j(c\omega+\beta)} \tilde{H}(\omega) \\ H^*(e^{-j\omega}) &= e^{-j(c(-\omega)+\beta)} \tilde{H}(-\omega) \end{aligned} \right\} \Rightarrow e^{j\beta} = e^{-j\beta} \Rightarrow \beta = 0 \text{ or } \beta = \pi$$

- ◆ 下面两个式子相等:

$$\tilde{H}(\omega) = \pm e^{-jc\omega} H(e^{j\omega}) = \pm \sum_{n=0}^N h[n] e^{-j\omega(c+n)}$$

$$\tilde{H}(-\omega) = \pm \sum_{l=0}^N h[l] e^{j\omega(c+l)} = \pm \sum_{n=0}^N h[N-n] e^{j\omega(c+N-n)}$$

- ◆ 时域 FIR 冲激响应序列的性质: $h[n] = h[N-n]$, 且 $c = -N/2$

线性相位 FIR 传输函数的形式 2

- ◆ $\tilde{H}(\omega)$ 为奇函数, $\tilde{H}(\omega) = -\tilde{H}(-\omega)$

$$\left. \begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{j(c\omega+\beta)} \tilde{H}(\omega) \\ H^*(e^{-j\omega}) &= e^{-j(c(-\omega)+\beta)} \tilde{H}(-\omega) \end{aligned} \right\} \Rightarrow e^{j\beta} = -e^{-j\beta} \Rightarrow \beta = \pm\pi/2$$

- ◆ 下面两个式子相等:

$$\tilde{H}(\omega) = -je^{-jc\omega} H(e^{j\omega}) = -j \sum_{n=0}^N h[n] e^{-j\omega(c+n)}$$

$$\tilde{H}(-\omega) = -j \sum_{l=0}^N h[l] e^{j\omega(c+l)} = -j \sum_{n=0}^N h[N-n] e^{j\omega(c+N-n)}$$

- ◆ 时域 FIR 冲激响应序列的性质: $h[n] = -h[N-n]$, 且 $c = -N/2$

线性相位 FIR 滤波器的几种类型

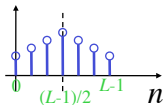
4 types:

Odd length

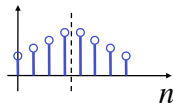
Even length

Symmetric

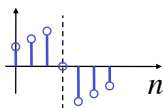
Type 1



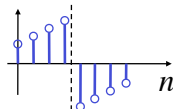
Type 2



Type 3



Type 4



Anti-symmetric

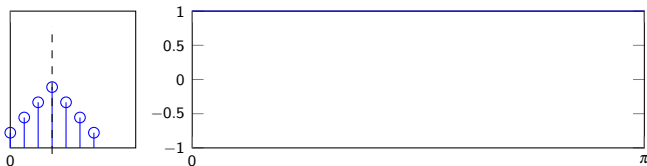
1 型线性相位滤波器

- ◆ **奇长度对称序列**： L 为奇数（最高阶数 $N = L - 1$ 为偶数）， $h[n] = h[N - n]$
- ◆ 1 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(h\left[\frac{N}{2}\right] + 2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \cos \omega n \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应： $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega$

- ◆ 幅度响应： $H(e^{j\omega}) = h\left[\frac{N}{2}\right] + 2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \cos \omega n$



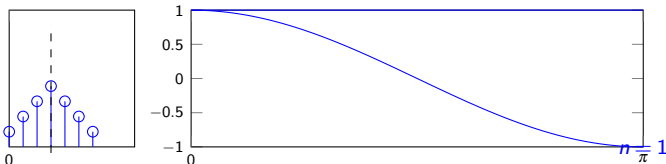
1 型线性相位滤波器

- ◆ **奇长度对称序列**： L 为奇数（最高阶数 $N = L - 1$ 为偶数）， $h[n] = h[N - n]$
- ◆ 1 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(h\left[\frac{N}{2}\right] + 2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \cos \omega n \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应： $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega$

- ◆ 幅度响应： $H(e^{j\omega}) = h\left[\frac{N}{2}\right] + 2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \cos \omega n$



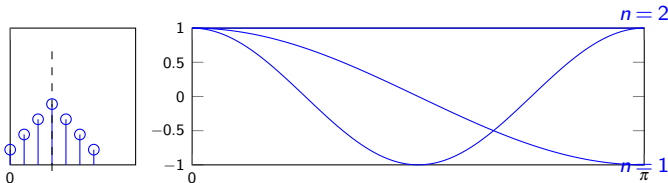
1 型线性相位滤波器

- ◆ **奇长度对称序列**： L 为奇数（最高阶数 $N = L - 1$ 为偶数）， $h[n] = h[N - n]$
- ◆ 1 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(h\left[\frac{N}{2}\right] + 2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \cos \omega n \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应： $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega$

- ◆ 幅度响应： $H(e^{j\omega}) = h\left[\frac{N}{2}\right] + 2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \cos \omega n$



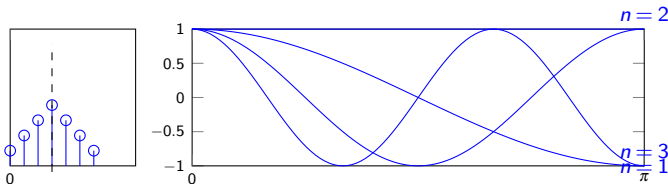
1 型线性相位滤波器

- ◆ **奇长度对称序列**： L 为奇数（最高阶数 $N = L - 1$ 为偶数）， $h[n] = h[N - n]$
- ◆ 1 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(h\left[\frac{N}{2}\right] + 2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \cos \omega n \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应： $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega$

- ◆ 幅度响应： $H(e^{j\omega}) = h\left[\frac{N}{2}\right] + 2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \cos \omega n$



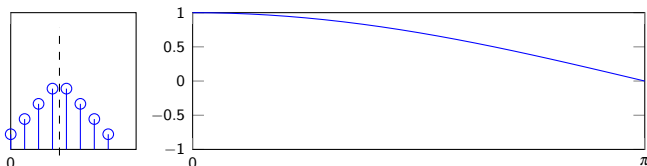
2 型线性相位滤波器

- ◆ **偶长度对称序列**： L 为偶数（最高阶数 $N = L - 1$ 为奇数）， $h[n] = h[N - n]$
- ◆ 2 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \cos\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应： $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega$

- ◆ 幅度响应： $H(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \cos\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$



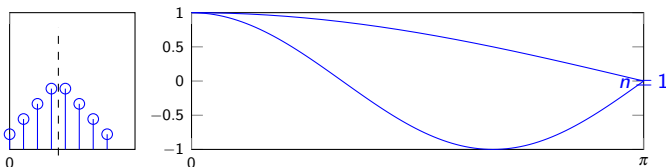
2 型线性相位滤波器

- ◆ **偶长度对称序列**: L 为偶数 (最高阶数 $N = L - 1$ 为奇数), $h[n] = h[N - n]$
- ◆ 2 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \cos\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应: $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega$

- ◆ 幅度响应: $H(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \cos\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$



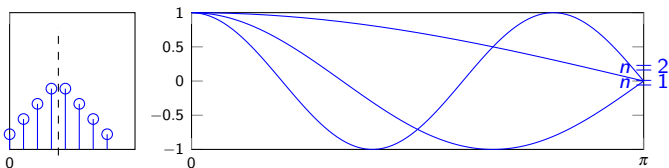
2 型线性相位滤波器

- ◆ **偶长度对称序列**: L 为偶数 (最高阶数 $N = L - 1$ 为奇数), $h[n] = h[N - n]$
- ◆ 2 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \cos\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应: $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega$

- ◆ 幅度响应: $H(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \cos\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$



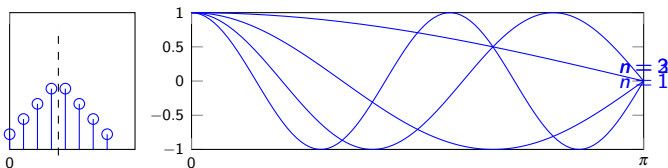
2 型线性相位滤波器

- ◆ **偶长度对称序列**： L 为偶数（最高阶数 $N = L - 1$ 为奇数）， $h[n] = h[N - n]$
- ◆ 2 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \cos\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应： $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega$

- ◆ 幅度响应： $H(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \cos\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$



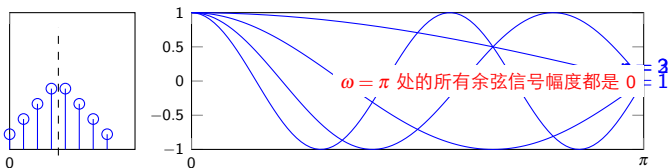
2 型线性相位滤波器

- ◆ **偶长度对称序列**： L 为偶数（最高阶数 $N = L - 1$ 为奇数）， $h[n] = h[N - n]$
- ◆ 2 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \cos\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应： $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega$

- ◆ 幅度响应： $H(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \cos\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$



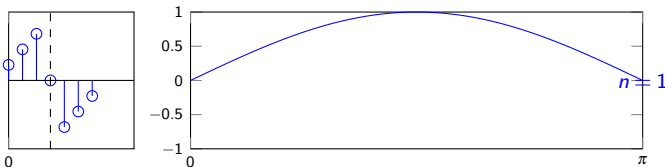
3 型线性相位 FIR 滤波器

- ◆ **奇长度反对称序列**： L 为奇数（最高阶数 $N = L - 1$ 为偶数， $h[n] = -h[N - n]$ ($h[N/2] = 0$)
- ◆ 3 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = je^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \sin \omega n \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应： $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega + \pi$

- ◆ 幅度响应： $H(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \sin \omega n$



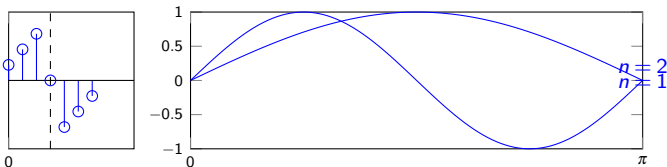
3 型线性相位 FIR 滤波器

- ◆ **奇长度反对称序列**： L 为奇数（最高阶数 $N = L - 1$ 为偶数， $h[n] = -h[N - n]$ ($h[N/2] = 0$)
- ◆ 3 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = je^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \sin \omega n \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应： $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega + \pi$

- ◆ 幅度响应： $H(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \sin \omega n$



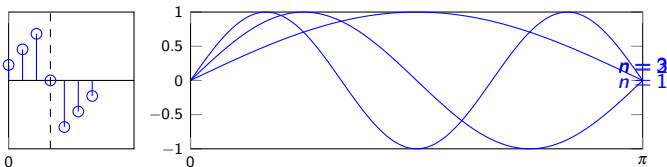
3 型线性相位 FIR 滤波器

- ◆ **奇长度反对称序列**: L 为奇数 (最高阶数 $N = L - 1$ 为偶数, $h[n] = -h[N - n]$ ($h[N/2] = 0$))
- ◆ 3 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = je^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \sin \omega n \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应: $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega + \pi$

- ◆ 幅度响应: $H(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \sin \omega n$



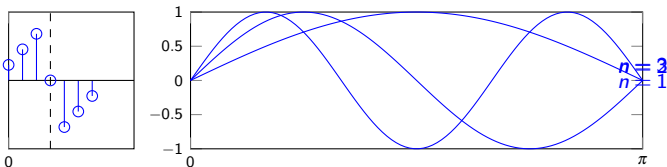
3 型线性相位 FIR 滤波器

- ◆ **奇长度反对称序列**: L 为奇数 (最高阶数 $N = L - 1$ 为偶数, $h[n] = -h[N - n]$ ($h[N/2] = 0$))
- ◆ 3 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = je^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \sin \omega n \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应: $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega + \pi$

- ◆ 幅度响应: $H(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \sin \omega n$



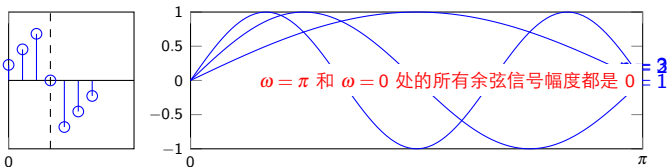
3 型线性相位 FIR 滤波器

- ◆ **奇长度反对称序列**： L 为奇数（最高阶数 $N = L - 1$ 为偶数， $h[n] = -h[N - n]$ ($h[N/2] = 0$)
- ◆ 3 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = je^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \sin \omega n \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应： $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega + \pi$

- ◆ 幅度响应： $H(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \sin \omega n$



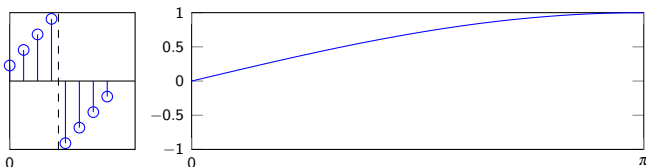
4 型线性相位 FIR 滤波器

- ◆ **偶长度反对称序列**： L 为偶数（最高阶数 $N = L - 1$ 为奇数）， $h[n] = -h[N - n]$
- ◆ 4 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = je^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \sin\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应： $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega + \pi$

- ◆ 幅度响应： $H(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \sin\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$



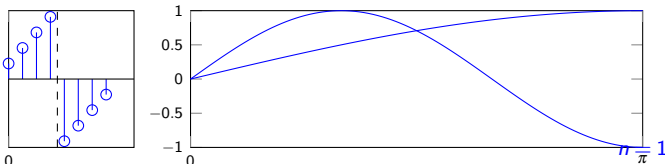
4 型线性相位 FIR 滤波器

- ◆ **偶长度反对称序列**： L 为偶数（最高阶数 $N = L - 1$ 为奇数）， $h[n] = -h[N - n]$
- ◆ 4 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = je^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \sin\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应： $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega + \pi$

- ◆ 幅度响应： $H(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \sin\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$



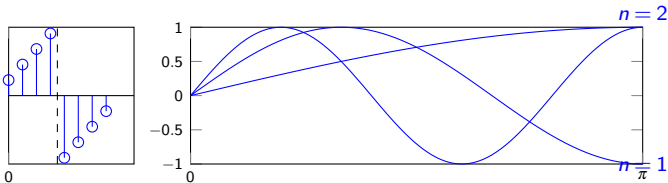
4 型线性相位 FIR 滤波器

- ◆ **偶长度反对称序列**： L 为偶数（最高阶数 $N = L - 1$ 为奇数）， $h[n] = -h[N - n]$
- ◆ 4 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = je^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \sin\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应： $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega + \pi$

- ◆ 幅度响应： $H(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \sin\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$



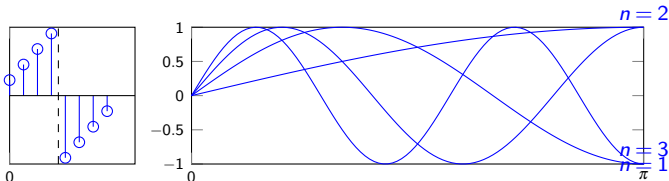
4 型线性相位 FIR 滤波器

- ◆ **偶长度反对称序列**：\$L\$ 为偶数（最高阶数 \$N = L - 1\$ 为奇数），\$h[n] = -h[N - n]\$
- ◆ 4 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = je^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \sin\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应：\$\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega + \pi\$

- ◆ 幅度响应：\$H(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \sin\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)\$



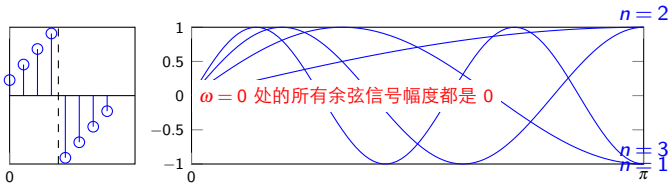
4 型线性相位 FIR 滤波器

- ◆ **偶长度反对称序列**： L 为偶数（最高阶数 $N = L - 1$ 为奇数）， $h[n] = -h[N - n]$
- ◆ 4 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应 (recall Chapter 5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-j\omega n} = j e^{-j\omega N/2} \underbrace{\left(2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \sin\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right)}_{=\tilde{H}(e^{j\omega})}$$

- ◆ 相位响应： $\theta(\omega) = -\frac{N}{2}\omega + \pi$

- ◆ 幅度响应： $H(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left[\frac{N+1}{2} - n\right] \sin\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$



线性相位 FIR 传输函数的零点位置

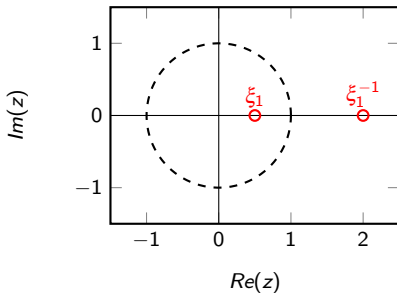
FIR 线性相位传输函数的零点位置 (1-2 型镜像多项式; 3-4 型反镜像多项式):

$$h[n] = \pm h[N-n] \Rightarrow H(z) = \pm z^{-N} H(z^{-1})$$

那么对于零点 $z = \xi$, 则 $z = 1/\xi$ 也是零点

$$H(\xi) = 0 \Rightarrow H(\xi^{-1}) = 0$$

所以, FIR 线性相位传输函数的零点位置是**镜像对称的**。



线性相位 FIR 传输函数的零点位置

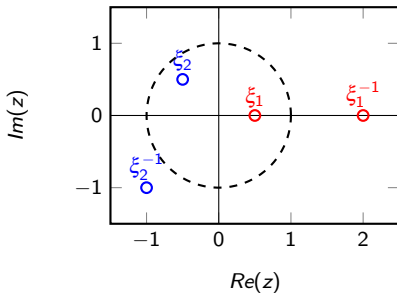
FIR 线性相位传输函数的零点位置（1-2 型镜像多项式；3-4 型反镜像多项式）：

$$h[n] = \pm h[N-n] \Rightarrow H(z) = \pm z^{-N} H(z^{-1})$$

那么对于零点 $z = \xi$, 则 $z = 1/\xi$ 也是零点

$$H(\xi) = 0 \Rightarrow H(\xi^{-1}) = 0$$

所以，FIR 线性相位传输函数的零点位置是**镜像对称的**。



线性相位 FIR 传输函数的零点位置

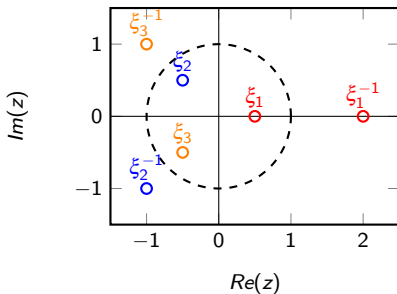
FIR 线性相位传输函数的零点位置 (1-2 型镜像多项式; 3-4 型反镜像多项式):

$$h[n] = \pm h[N-n] \Rightarrow H(z) = \pm z^{-N} H(z^{-1})$$

那么对于零点 $z = \xi$, 则 $z = 1/\xi$ 也是零点

$$H(\xi) = 0 \Rightarrow H(\xi^{-1}) = 0$$

所以, FIR 线性相位传输函数的零点位置是**镜像对称的**。



$z = \pm 1$ 处的零点

1-2 型线性相位传输函数满足镜像多项式

$$H(z) = z^{-N}H(z^{-1}) \Rightarrow H(-1) = (-1)^{-N}H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0 \text{ (2 型, } N \text{ 为奇数)}$$

3-4 型线性相位传输函数满足反镜像多项式

$$\begin{aligned} H(z) &= -z^{-N}H(z^{-1}) \Rightarrow \\ \begin{cases} H(1) &= -H(1) \Rightarrow H(1) = 0 \text{ (3-4 型)} \\ H(-1) &= -(-1)^{-N}H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0 \text{ (3 型, } N \text{ 为偶数)} \end{cases} \end{aligned}$$

$z = \pm 1$ 处的零点

1-2 型线性相位传输函数满足镜像多项式

$$H(z) = z^{-N}H(z^{-1}) \Rightarrow H(-1) = (-1)^{-N}H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0 \text{ (2 型, } N \text{ 为奇数)}$$

3-4 型线性相位传输函数满足反镜像多项式

$$\begin{aligned} H(z) &= -z^{-N}H(z^{-1}) \Rightarrow \\ \begin{cases} H(1) &= -H(1) \Rightarrow H(1) = 0 \text{ (3-4 型)} \\ H(-1) &= -(-1)^{-N}H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0 \text{ (3 型, } N \text{ 为偶数)} \end{cases} \end{aligned}$$

- 2 型线性相位传输函数不能用来做高通滤波器，因为 $z = -1$ 处必有零点；

$z = \pm 1$ 处的零点

1-2 型线性相位传输函数满足镜像多项式

$$H(z) = z^{-N}H(z^{-1}) \Rightarrow H(-1) = (-1)^{-N}H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0 \text{ (2 型, } N \text{ 为奇数)}$$

3-4 型线性相位传输函数满足反镜像多项式

$$\begin{aligned} H(z) &= -z^{-N}H(z^{-1}) \Rightarrow \\ \begin{cases} H(1) &= -H(1) \Rightarrow H(1) = 0 \text{ (3-4 型)} \\ H(-1) &= -(-1)^{-N}H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0 \text{ (3 型, } N \text{ 为偶数)} \end{cases} \end{aligned}$$

- 2 型线性相位传输函数不能用来做高通滤波器，因为 $z = -1$ 处必有零点；
- 3 型线性相位传输函数不能用来做低通、高通和带阻滤波器，因为 $z = \pm 1$ 处必有零点；

$z = \pm 1$ 处的零点

1-2 型线性相位传输函数满足镜像多项式

$$H(z) = z^{-N}H(z^{-1}) \Rightarrow H(-1) = (-1)^{-N}H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0 \text{ (2 型, } N \text{ 为奇数)}$$

3-4 型线性相位传输函数满足反镜像多项式

$$\begin{aligned} H(z) &= -z^{-N}H(z^{-1}) \Rightarrow \\ \begin{cases} H(1) &= -H(1) \Rightarrow H(1) = 0 \text{ (3-4 型)} \\ H(-1) &= -(-1)^{-N}H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0 \text{ (3 型, } N \text{ 为偶数)} \end{cases} \end{aligned}$$

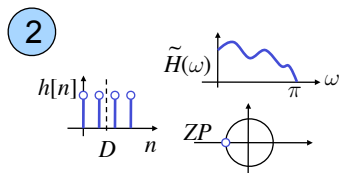
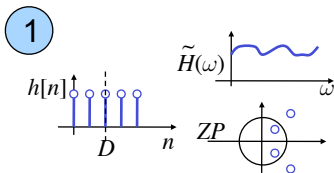
- 2 型线性相位传输函数不能用来做高通滤波器，因为 $z = -1$ 处必有零点；
- 3 型线性相位传输函数不能用来做低通、高通和带阻滤波器，因为 $z = \pm 1$ 处必有零点；
- 4 型线性相位传输函数不能用来做低通滤波器，因为 $z = 1$ 处必有零点。

线性相位 FIR 滤波器

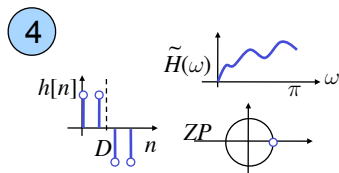
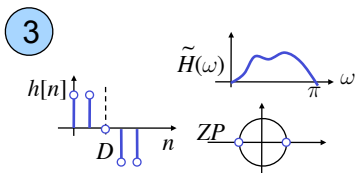
Odd length

Even length

Symmetric



Antisymmetric



Outline

1 介绍

2 数字滤波器分类：基于幅度响应

- 低通、高通、带通、带阻
- 有界实传输函数
- 全通滤波器

3 数字滤波器分类：基于相位响应

- 零相位
- 线性相位
- 最大/小相位

4 数字滤波器分类：其他

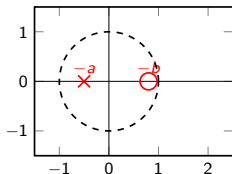
5 数字滤波器设计方法

- IIR 数字滤波器
 - 双线性变换
 - 谱变换
- FIR 数字滤波器
 - 加窗冲激响应
 - 窗函数形状
- 计算机辅助滤波器设计

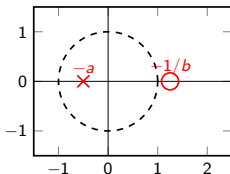
最小相位、最大相位传输函数

考虑下面两个 1 阶传输函数 $|a| < 1, |b| < 1$

$$H_1(z) = \frac{z+b}{z+a}$$



$$H_2(z) = \frac{bz+1}{z+a}$$



◆ 幅度响应相同: $H_1(z)H_1(z^{-1}) = H_2(z)H_2(z^{-1})$

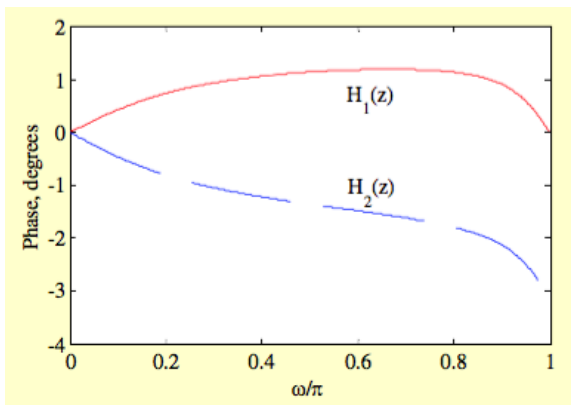
◆ 相位响应不同:

$$\arg[H_1(e^{j\omega})] = \tan^{-1} \frac{\sin \omega}{b + \cos \omega} - \tan^{-1} \frac{\sin \omega}{a + \cos \omega}$$

$$\arg[H_2(e^{j\omega})] = \tan^{-1} \frac{b \sin \omega}{1 + b \cos \omega} - \tan^{-1} \frac{\sin \omega}{a + \cos \omega}$$

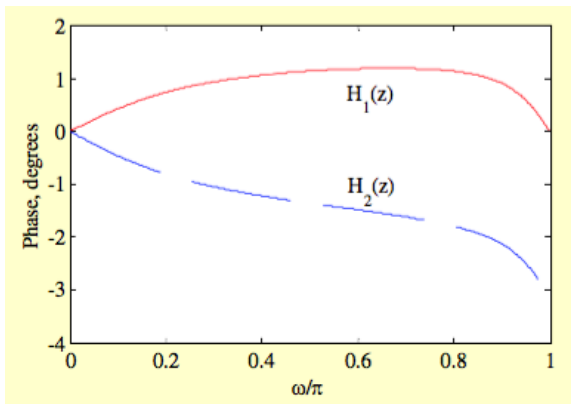
相位响应

Let $a = 0.8$ and $b = -0.5$, the phase responses for two transfer functions



相位响应

Let $a = 0.8$ and $b = -0.5$, the phase responses for two transfer functions



$H_2(z)$ 滞后于 $H_1(z)$

相位响应

$H_2(z)$ 滞后于 $H_1(z)$ 的原因:

$$H_2(z) = \frac{bz+1}{z+a} = \underbrace{\left(\frac{z+b}{z+a}\right)}_{H_1(z)} \cdot \underbrace{\left(\frac{bz+1}{z+b}\right)}_{A(z)}$$

其中, $A(z)$ 为稳定的全通函数。

那么, $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 的相位响应的关系

$$\arg[H_2(e^{j\omega})] = \arg[H_1(e^{j\omega})] + \arg[A(e^{j\omega})]$$

全通传输函数 (群延迟 $\tau_1(\omega) > 0, \forall \omega$),

$$\arg[A(e^{j\omega})] < 0$$

最小/最大相位传输函数

对于任意的因果稳定传输函数 $H(z)$ (所有极点都在单位圆内), 那么可以将传输函数分解为

$$H(z) = H_m(z)A(z)$$

- $H_m(z)$ 的所有零点都在单位圆内
- $A(z)$ 为因果稳定全通传输函数

最小/最大相位传输函数

对于任意的因果稳定传输函数 $H(z)$ (所有极点都在单位圆内), 那么可以将传输函数分解为

$$H(z) = H_m(z)A(z)$$

- $H_m(z)$ 的所有零点都在单位圆内
- $A(z)$ 为因果稳定全通传输函数

The unwrapped phase function of $H_m(z)$ and $H(z)$ are thus related through

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_m(e^{j\omega})] + \arg[A(e^{j\omega})]$$

$H(z)$ 滞后于 $H_m(z)$

最小/最大相位传输函数

因果稳定传输函数（极点全部在单位圆内）

- 若所有零点都在单位圆内，则称为**最小相位传输函数**
- 若所有零点都在单位圆外，则称为**最大相位传输函数**
- 若单位圆内和圆外都有零点，则称为**混合相位传输函数**

Example

考虑下面的混合相位传输函数，

$$H(z) = \frac{2(1 + 0.3z^{-1})(0.4 - z^{-1})}{(1 - 0.2z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})}$$

可以将其分解为如下形式

$$H(z) = \underbrace{\left[\frac{2(1 + 0.3z^{-1})(1 - 0.4z^{-1})}{(1 - 0.2z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})} \right]}_{\text{Minimumn-phase function}} \cdot \underbrace{\left(\frac{0.4 - z^{-1}}{1 - 0.4z^{-1}} \right)}_{\text{Allpass function}}$$

Outline

1 介绍

2 数字滤波器分类：基于幅度响应

- 低通、高通、带通、带阻
- 有界实传输函数
- 全通滤波器

3 数字滤波器分类：基于相位响应

- 零相位
- 线性相位
- 最大/小相位

4 数字滤波器分类：其他

5 数字滤波器设计方法

- IIR 数字滤波器
 - 双线性变换
 - 谱变换
- FIR 数字滤波器
 - 加窗冲激响应
 - 窗函数形状
- 计算机辅助滤波器设计

数字积分器

理想数字积分器的频率响应为

$$H_{INT}(e^{j\omega}) = \frac{1}{j\omega}$$

实际数字积分器通常采用近似上述频率响应的方法

- 前向矩形积分器 (Forward rectangular integrator)
- 后向矩形积分器 (Backward rectangular integrator)
- 梯形积分器 (Trapezoidal integrator)
- 辛普森积分器 (Simpson integrator)

前向矩形积分器

时域输入输出关系为

$$y[n] = y[n-1] + T \cdot x[n-1] \quad T \text{ 为采样周期}$$

传输函数为

$$H_{FR}(z) = T \left(\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right)$$

频率响应为

$$|H_{FR}(e^{j\omega})| = \frac{T}{\sqrt{(1 - \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega}} = \frac{T}{2|\sin \frac{\omega}{2}|}$$

后向矩形积分器

时域输入输出关系为

$$y[n] = y[n-1] + T \cdot x[n] \quad T \text{ 为采样周期}$$

传输函数为

$$H_{BR}(z) = T \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} \right)$$

频率响应为

$$|H_{BR}(e^{j\omega})| = \frac{T}{\sqrt{(1 - \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega}} = \frac{T}{2|\sin \frac{\omega}{2}|}$$

梯形积分器

时域输入输出关系为

$$y[n] = y[n-1] + \frac{T}{2} \cdot (x[n] + x[n-1]) \quad T \text{ 为采样周期}$$

传输函数为

$$H_{TR}(z) = \frac{T}{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right)$$

频率响应为

$$|H_{TR}(e^{j\omega})| = T \sqrt{\frac{(1+\cos\omega)^2 + \sin^2\omega}{(1-\cos\omega)^2 + \sin^2\omega}} = \frac{T}{2|\tan\frac{\omega}{2}|}$$

辛普森积分器

时域输入输出关系为

$$y[n] = y[n-2] + \frac{T}{3} \cdot (x[n] + 4x[n-1] + x[n-2]) \quad T \text{ 为采样周期}$$

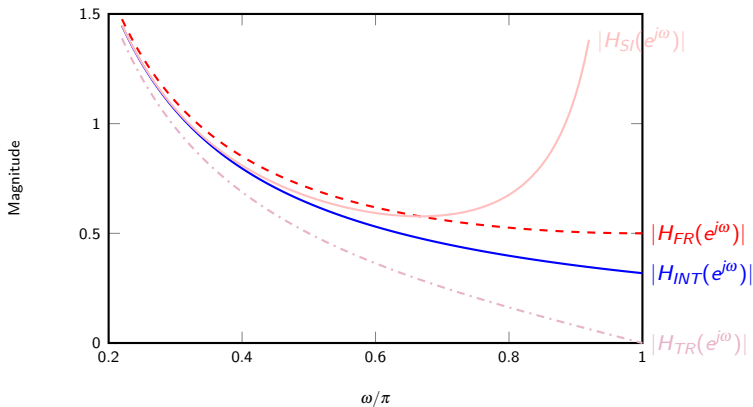
传输函数为

$$H_{SI}(z) = \frac{T}{3} \left(\frac{1 + 4z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}} \right)$$

频率响应为

$$|H_{SI}(e^{j\omega})| = \frac{T}{3} \left| \frac{2 + \cos \omega}{\sin \omega} \right|$$

不同积分器的频率响应



数字微分器

理想数字微分器的频率响应为

$$H_{DIFF}(e^{j\omega}) = j\omega$$

实际数字微分器通常采用近似上述频率响应的方法

- 一阶差分微分器 (First-Difference Differentiator)
- 中心差分微分器 (Central-Difference Differentiator)
- 高阶微分器 (Higher-order Differentiator)

一阶差分微分器

时域输入输出关系为

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

传输函数为

$$H_{FD}(z) = 1 - z^{-1}$$

频率响应为

$$|H_{FD}(e^{j\omega})| = 2 \left| \sin \frac{\omega}{2} \right|$$

中心差分微分器

时域输入输出关系为

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[n-2])$$

传输函数为

$$H_{CD}(z) = \frac{1}{2}(1 - z^{-2})$$

频率响应为

$$|H_{FD}(e^{j\omega})| = |\sin \omega|$$

高阶微分器

时域输入输出关系为

$$y[n] = -\frac{1}{12}x[n] + \frac{2}{3}x[n-1] - \frac{2}{3}x[n-3] + \frac{1}{12}x[n-4]$$

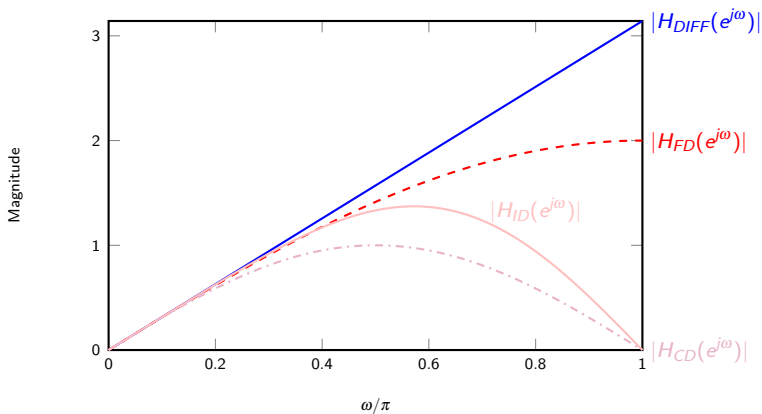
传输函数为

$$H_{ID}(z) = -\frac{1}{12} + \frac{2}{3}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-3} + \frac{1}{12}z^{-4}$$

频率响应为

$$|H_{ID}(e^{j\omega})| = \frac{1}{6}|8\sin\omega - \sin(2\omega)|$$

不同微分器的频率响应



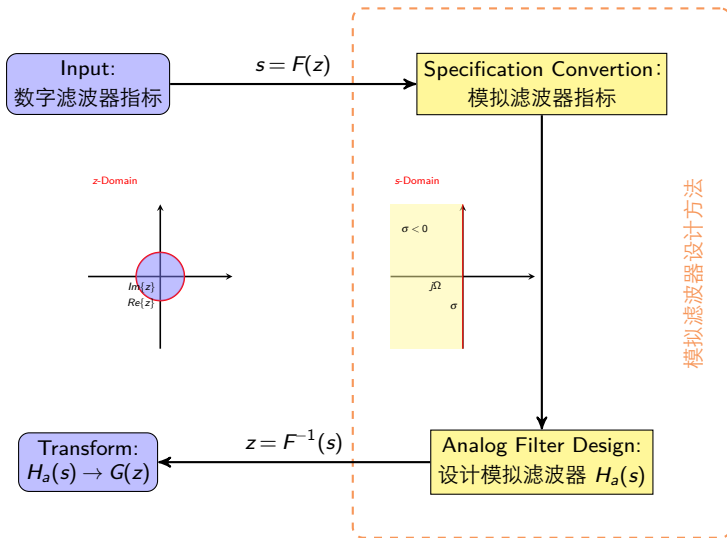
Outline

- 1 介绍
- 2 数字滤波器分类：基于幅度响应
 - 低通、高通、带通、带阻
 - 有界实传输函数
 - 全通滤波器
- 3 数字滤波器分类：基于相位响应
 - 零相位
 - 线性相位
 - 最大/小相位
- 4 数字滤波器分类：其他
- 5 数字滤波器设计方法
 - IIR 数字滤波器
 - 双线性变换
 - 谱变换
 - FIR 数字滤波器
 - 加窗冲激响应
 - 窗函数形状
 - 计算机辅助滤波器设计

Outline

- 1 介绍
- 2 数字滤波器分类：基于幅度响应
 - 低通、高通、带通、带阻
 - 有界实传输函数
 - 全通滤波器
- 3 数字滤波器分类：基于相位响应
 - 零相位
 - 线性相位
 - 最大/小相位
- 4 数字滤波器分类：其他
- 5 数字滤波器设计方法
 - IIR 数字滤波器
 - 双线性变换
 - 谱变换
 - FIR 数字滤波器
 - 加窗冲激响应
 - 窗函数形状
 - 计算机辅助滤波器设计

Basic Approaches to Design IIR Filters



Analog Filter Design

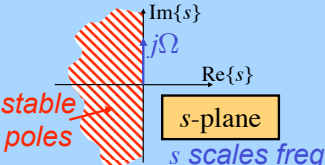
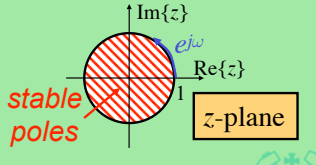
回顾一下模拟滤波器设计方法 (附录 A):

- 通带和阻带纹波 与 平坦度
- 纹波越大 \rightarrow 过渡带越窄

<i>Family</i>	<i>PassBand</i>	<i>StopBand</i>
Butterworth	flat	flat
Chebyshev I	ripples	flat
Chebyshev II	flat	ripples
Elliptical	ripples	ripples

Continuous time Transfer Function

模拟系统的传输函数定义为冲击响应的 **Laplace** 变换

	Continuous-time	Discrete-time
Transform	$H_a(s) = \int h_a(t) e^{-st} dt$	$H_d(z) = \sum h_d[n] z^{-n}$
Frequency response	$H_a(j\Omega)$	$H_d(e^{j\omega})$
Pole/zero diagram	 <p>The s-plane diagram shows a complex plane with axes Re{s} and Im{s}. A shaded red region in the left half-plane is labeled "stable poles". A box labeled "s-plane" is present, with a note "s scales freq".</p>	 <p>The z-plane diagram shows a complex plane with axes Re{z} and Im{z}. A shaded red circle of radius 1 is labeled "stable poles". A point on the unit circle is labeled "e^{j\omega}". A box labeled "z-plane" is present.</p>

Butterworth Filters

巴特沃斯滤波器在通带和阻带内具有**最大平坦度**
 低通巴特沃斯滤波器的幅度响应：

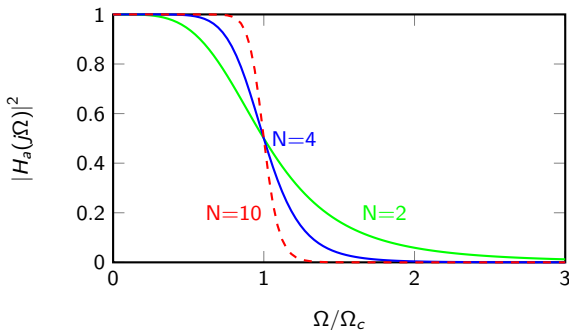
$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

N 为滤波器阶数

Ω_c 为滤波器截止频率

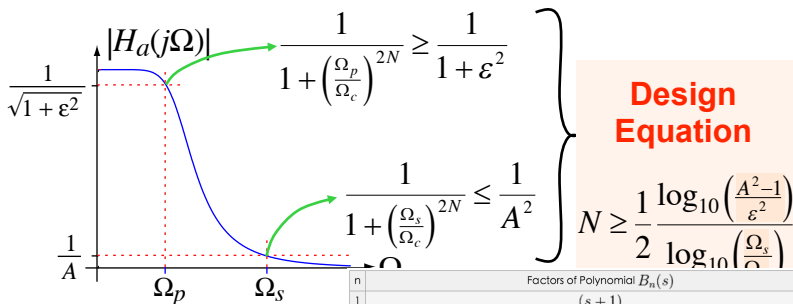
$\Omega \ll \Omega_c, |H_a(j\Omega)|^2 \rightarrow 1$

$\Omega = \Omega_c, |H_a(j\Omega)|^2 = 1/2$



Butterworth Filters

确定 Butterworth 滤波器的阶数



传输函数 $H_a(s) = \frac{1}{B_N(s/\Omega_c)}$

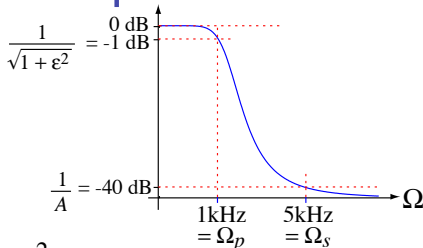
- 查表得到
- Matlab 的信号处理工具箱

n	Factors of Polynomial $B_n(s)$
1	$(s + 1)$
2	$s^2 + 1.4142s + 1$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0.7654s + 1)(s^2 + 1.8478s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.6180s + 1)(s^2 + 1.6180s + 1)$
6	$(s^2 + 0.5176s + 1)(s^2 + 1.4142s + 1)(s^2 + 1.9319s + 1)$
7	$(s + 1)(s^2 + 0.4450s + 1)(s^2 + 1.2470s + 1)(s^2 + 1.8019s + 1)$
8	$(s^2 + 0.3902s + 1)(s^2 + 1.1111s + 1)(s^2 + 1.6629s + 1)(s^2 + 1.9616s + 1)$

Example

Butterworth Example

Design a Butterworth filter with 1 dB cutoff at 1kHz and a minimum attenuation of 40 dB at 5 kHz



$$-1\text{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \Rightarrow \epsilon^2 = 0.259$$

$$-40\text{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{A} \Rightarrow A = 100$$

$$\frac{\Omega_s}{\Omega_p} = 5$$

$$N \geq \frac{1}{2} \frac{\log_{10} \frac{9999}{0.259}}{\log_{10} 5}$$

$$\Rightarrow N = 4 \geq 3.28$$

Example

Determine Butterworth Transfer Function:

- 滤波器阶数确定为 $N = 4$, 由于 $\Omega_p = 1\text{kHz}$ 时候幅度为 -1dB ,

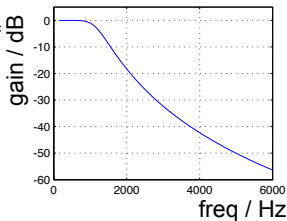
$$-10\log_{10}\left(1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}\right) = -1\text{dB} \Rightarrow \Omega_c =$$

- 通过查表得到 $H_a(s)$

$$H_a(s) = \frac{1}{B_4(s/(2\pi\Omega_c))}$$

- 或者通过 Matlab 可以得到:

$$[B,A] = \text{butter}(N,Wc,'s');$$

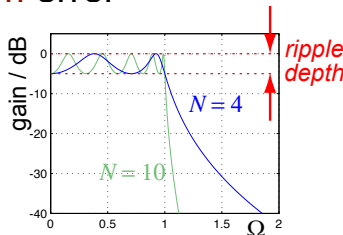


$$H_a(s) = \frac{3.063 \times 10^{15}}{s^4 + 1.944 \times 10^4 s^3 + 1.890 \times 10^8 s^2 + 1.076 \times 10^{12} s + 3.063 \times 10^{15}}$$

Chebyshev I Filter

- **Equiripple** in passband (flat in stopband)
 → minimize **maximum** error

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\frac{\Omega}{\Omega_p})}$$



*Chebyshev
polynomial
of order N*

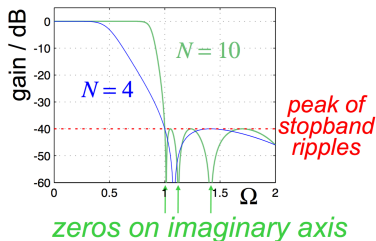
$$T_N(\Omega) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} \Omega) & |\Omega| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} \Omega) & |\Omega| > 1 \end{cases}$$

Chebyshev II Filter

- Flat in **passband**, equiripple in **stopband**

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{T_N(\frac{\Omega_s}{\Omega_p})}{T_N(\frac{\Omega_s}{\Omega})} \right)^2}$$

$\text{constant} \rightarrow$ (points to the numerator 1)
 $\sim 1/T_N(1/\Omega) \rightarrow$ (points to the denominator term)



- Filter has poles **and zeros** (some \rightarrow)
- Complicated pole/zero pattern

Elliptical Filter

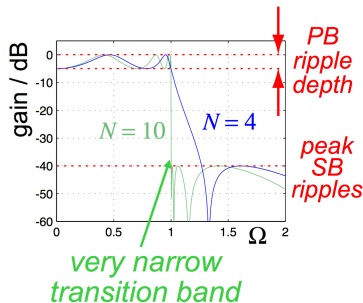
- Ripples in **both** passband and stopband

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$$

function; satisfies

$$R_N(\Omega^{-1}) = R_N(\Omega)^{-1}$$

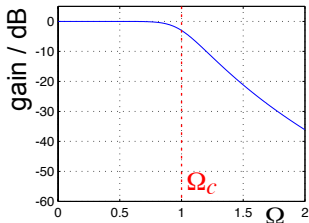
zeros for $\Omega < 1 \rightarrow$ poles for $\Omega > 1$



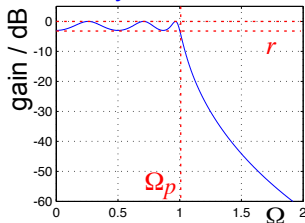
- Complicated; not even closed form for N

Analog Filter Types Summary

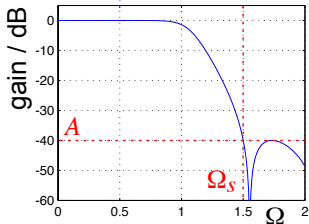
Butterworth



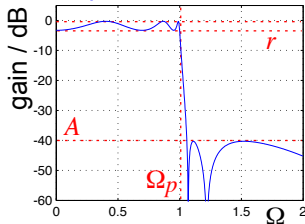
Chebyshev I



Chebyshev II



Elliptical

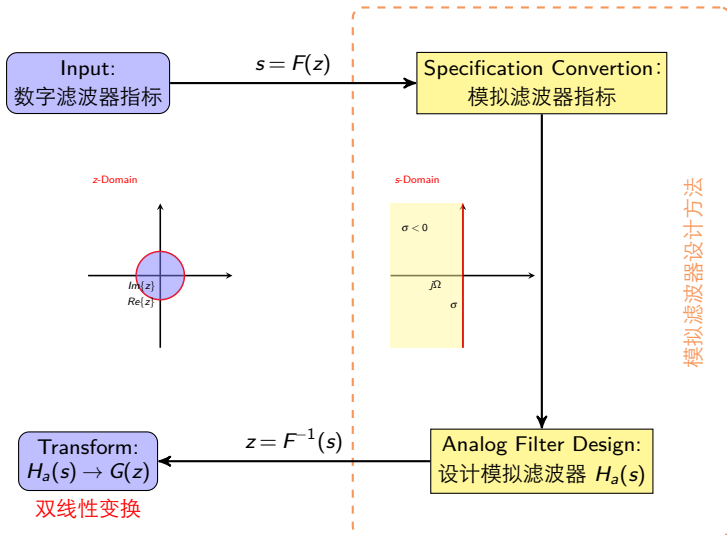


$N = 6$

$r = 3$ dB

$A = 40$ dB

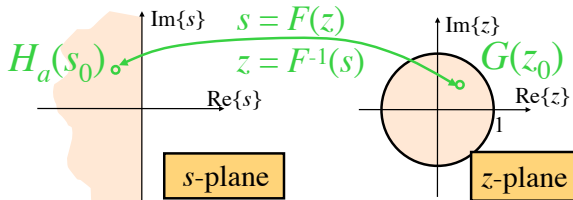
Basic Approaches to Design IIR Filters



Design IIR Digital Filters via Analog Filters

将设计好的模拟滤波器变换成等效的数字滤波器

$$H_a(s) \rightarrow G(z) \text{ 或者 } G(z) = H_a(s)|_{s=F(z)}$$

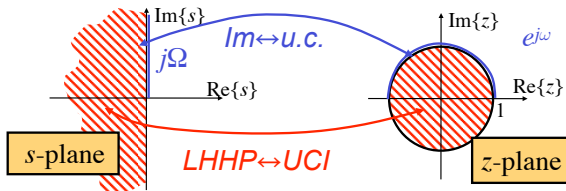


如何定义从 *s*-域到 *z*-域的变换: $s = F(z)$?

CT to DT Transformation

$s = F(z)$ 需要满足如下条件:

- s-域中的 $j\Omega$ 轴 \leftrightarrow z-域中的单位圆
使得变换后频率响应不变
- s-域中的左半平面 \leftrightarrow z-域中的单位圆内
使得变换后系统稳定性不变



Bilinear Transformation

定义从 z 平面到 s 平面的双线性变换 $s = F(z)$

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

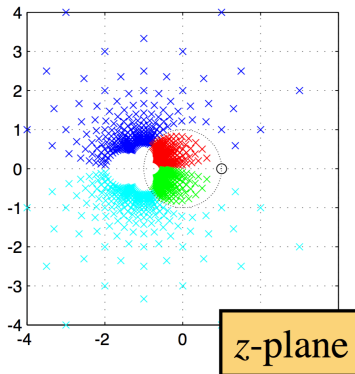
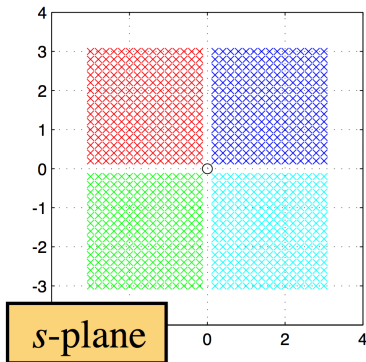
从 s 平面到 z 平面的逆双线性变换 $z = F^{-1}(s)$

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}$$

可以得出 $s = \sigma_0 + j\Omega_0$

$$|z|^2 = \frac{(1 + \frac{T}{2}\sigma_0)^2 + (\frac{T}{2}\Omega_0)^2}{(1 - \frac{T}{2}\sigma_0)^2 + (\frac{T}{2}\Omega_0)^2} \begin{cases} < 1 & \sigma_0 < 0 \\ = 1 & \sigma_0 = 0 \\ > 1 & \sigma_0 > 0 \end{cases}$$

Bilinear Transformation



Bilinear Transformation

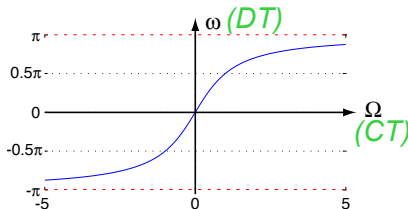
s 平面的虚轴 ($s = j\Omega$) 与 z 平面的单位圆 ($z = e^{j\omega}$) 之间的关系

$$j\Omega = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \right) = j \frac{2}{T} \tan(\omega/2)$$

连续频率 Ω 和离散域频率 ω 之间的关系为

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$$

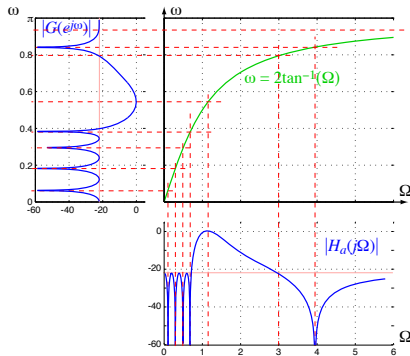


Frequency Warping

双线性变换是一个**非线性变换**

$\omega = 2\arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$ 说明双线性变换将范围在 $(-\infty, \infty)$ 的连续频率 Ω 映射到范围在 $(-\pi, \pi)$ 的离散频率 ω
 双线性变换会引起频率畸变

$$G(e^{j\omega}) = H_a(j\Omega) \Big|_{\omega=2\arctan(\frac{\Omega T}{2})}$$



Design IIR Filters via Bilinear Transformation

通（阻）带边界频率：

ω_p, ω_s

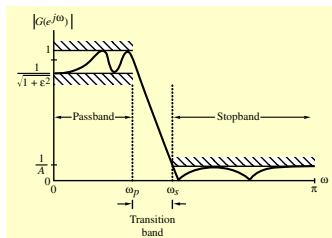
Input: 低通
数字滤波器指标

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

通（阻）带边界频率：

Ω_p, Ω_s

Specification Conversion:
模拟滤波器指标



模拟滤波器设计方法

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

Transform:
 $H_a(s) \rightarrow G(z)$

$$G(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)}$$

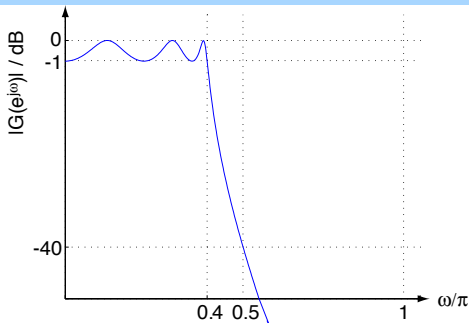
Analog Filter Design:
设计模拟滤波器 $H_a(s)$

$H_a(s)$

Example 1

设计满足下列指标的数字滤波器：

Lowpass, 1 dB ripple in PB, $\omega_p = 0.4\pi$,
SB attenuation ≥ 40 dB @ $\omega_s = 0.5\pi$,
attenuation increases with frequency



- PB ripples,
SB monotonic
→ Chebyshev I



Example 1

- 指标变换:

$$\Omega_p = \tan \frac{\omega_p}{2} = \tan 0.2\pi = 0.7265 \text{ rad/sec}$$

$$\Omega_s = \tan \frac{\omega_s}{2} = \tan 0.25\pi = 1.0 \text{ rad/sec}$$

- 幅度指标:

1dB 通带波纹

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 10^{-1/20} = 0.8913 \Rightarrow \varepsilon = 0.5078$$

40dB 阻带衰减

$$\Rightarrow \frac{1}{A} = 10^{-40/20} = 0.01 \Rightarrow A = 100$$

- Chebyshev I 滤波器设计 - 最小阶数:

$$N \geq \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{\sqrt{A^2-1}}{\varepsilon} \right)}{\cosh^{-1} \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right)} = 7.09 \Rightarrow N = 8$$

Example 1

- 设计模拟滤波器 → 双线性变换得到数字滤波器

$N=8$;

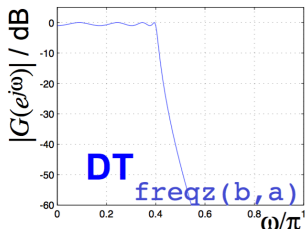
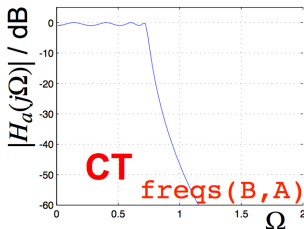
$wp=0.7265$;

$pripple = 1.0$;

$[B,A] = cheby1(N,pripple,wp,'s')$;

$[b,a] = bilinear(B,A,.5)$;

- 幅度响应



Example 2

设计满足下列指标的数字滤波器：

- 设计最大平坦幅度特性的低通滤波器
- 通带边界频率 $\omega_p = 0.25\pi$
- 阻带边界频率 $\omega_s = 0.55\pi$
- 通带波纹不超过 0.5dB
- 最小阻带衰减为 15dB

Example 2

- 指标变换:

$$\Omega_p = \tan \frac{\omega_p}{2} = \tan 0.125\pi = 0.4142136$$

$$\Omega_s = \tan \frac{\omega_s}{2} = \tan 0.275\pi = 1.1708496$$

- 幅度指标:

0.5dB 通带波纹

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 10^{-0.5/20} \Rightarrow \varepsilon = 0.3493114$$

15dB 阻带衰减

$$\Rightarrow \frac{1}{A} = 10^{-15/20} \Rightarrow A^2 = 31.62278$$

- Butterworth 滤波器设计-最小阶数:

$$N \geq \frac{\lg\left(\frac{\sqrt{A^2-1}}{\varepsilon}\right)}{\lg\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} = 2.6587 \Rightarrow N = 3$$

Example 2

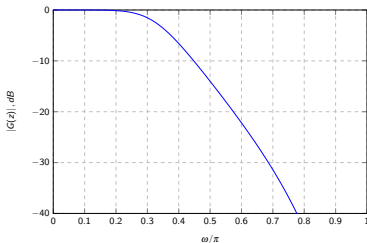
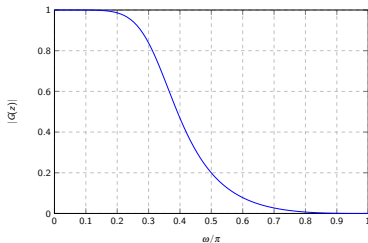
- 截止频率 Ω_c :

$$|H_a(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_p/\Omega_c)^{2N}} = 10^{-0.5/10} \Rightarrow \Omega_c = 0.588148$$

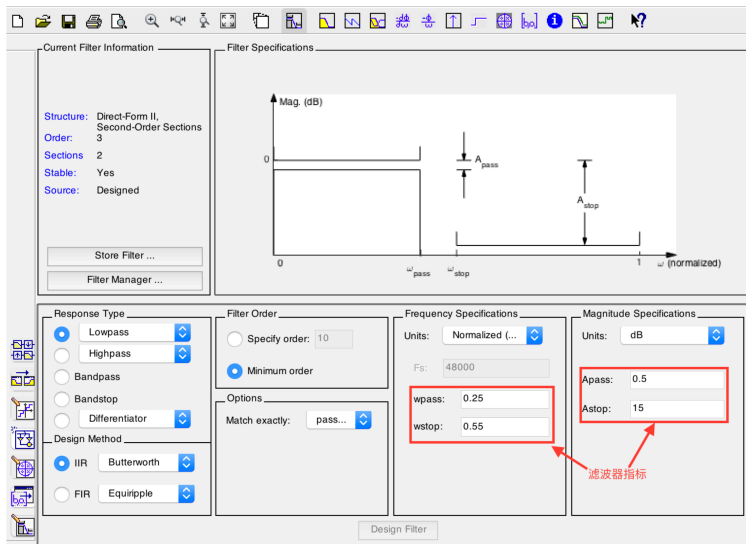
- 归一化 ($\Omega_c = 1$) 3 阶模拟 **Butterworth** 低通滤波器 $H_{an}(j\Omega)$:

$$H_{an}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} \Rightarrow H_a(s) = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)$$

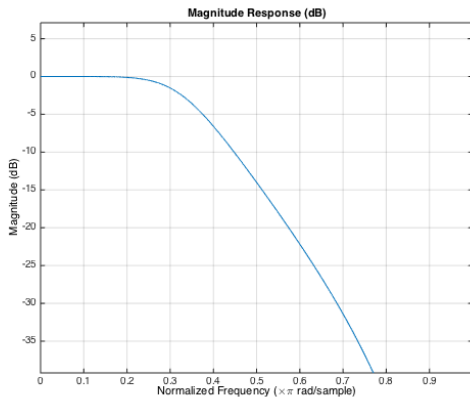
- 双线性变换: $G(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$



Filter Design via Matlab

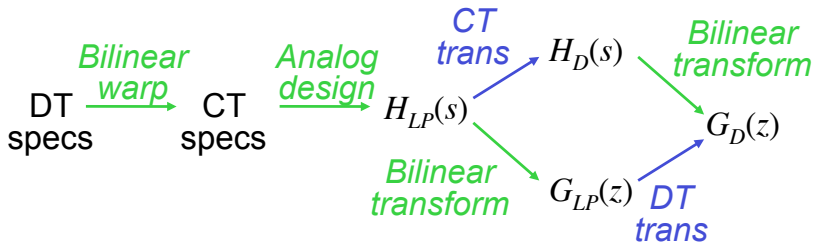


Filter Design via Matlab



Other Filter Shapes

高通、带通、带阻滤波器设计方法



谱变换方法?

Continuous-time Spectral Transformation

连续时间谱变换方法

$$H_{LP}(s) \xrightleftharpoons[\hat{s} = F^{-1}(s)]{s = F(\hat{s})} H_D(\hat{s})$$

▪ 低通 → 高通

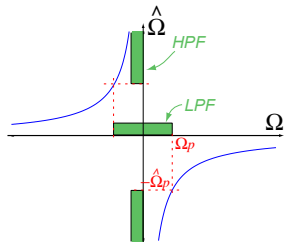
$$s = F(\hat{s}) = \frac{\Omega_p \hat{\Omega}_p}{\hat{s}}$$

▪ 低通 → 带通

$$s = F(\hat{s}) = \Omega_p \frac{\hat{s}^2 + \hat{\Omega}_o^2}{\hat{s}(\hat{\Omega}_{p2} - \hat{\Omega}_{p1})}$$

▪ 低通 → 带阻

$$s = F(\hat{s}) = \Omega_s \frac{\hat{s}(\hat{\Omega}_{s2} - \hat{\Omega}_{s1})}{\hat{s}^2 + \hat{\Omega}_o^2}$$



请参考附录 B

Example 2

设计切比雪夫 1 型高通滤波器，指标为：

- 通带边界频率 $F_p = 700\text{Hz}$
- 阻带边界频率 $F_s = 500\text{Hz}$
- 通带波纹 $\alpha_p = 1\text{dB}$
- 阻带最小衰减 $\alpha_s = 32\text{dB}$
- 采样频率 $F_T = 2000\text{Hz}$

Example 2

- ① 归一化角频率

$$\omega_p = \frac{2\pi F_p}{F_T} = 0.7\pi$$

$$\omega_s = \frac{2\pi F_s}{F_T} = 0.5\pi$$

- ② 频率变换：离散时间 \rightarrow 连续时间

$$\hat{\Omega}_p = \tan(\omega_p/2) = 1.9626$$

$$\hat{\Omega}_s = \tan(\omega_s/2) = 1.0$$

- ③ 设计低通滤波器 \rightarrow 高通滤波器

$$\Omega_p = 2 \Rightarrow \Omega_s = \frac{\Omega_p \hat{\Omega}_p}{\hat{\Omega}_s} = 3.9352$$

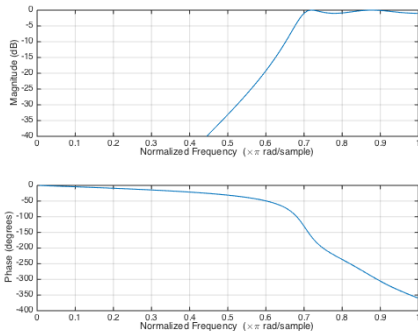
- ④ 双线性变换：连续时间 \rightarrow 离散时间

Example 2

MATLAB 实现

```

» [N,Wn] = cheb1ord(2,3.9252,1,32,'s');
» [B,A] = cheby1(N,1,Wn,'s');
» [BT,AT] = lp2hp(B,A,3.9252);
» [num,den]=bilinear(BT,AT,0.5);
    
```



Discrete-time Spectral Transformation

离散时间谱变换方法

$$G_{LP}(z) \xrightleftharpoons[\hat{z} = F^{-1}(z)]{z = F(\hat{z})} G_D(\hat{z})$$

变换函数 $z = F(\hat{z})$ 必须满足

- 单位圆 \rightarrow 单位圆映射 (保证频率响应不变)
- 单位圆内 \rightarrow 单位圆内映射 (保证稳定性)

$$|F(\hat{z})| \begin{cases} > 1, & |\hat{z}| > 1 \\ = 1, & |\hat{z}| = 1 \\ < 1, & |\hat{z}| < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{F(\hat{z})} \text{ 是稳定全通函数}$$

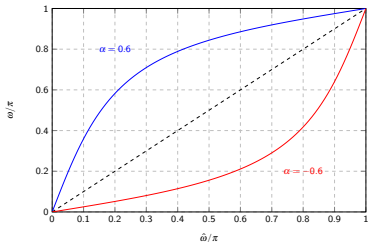
Lowpass to lowpass

低通 → 低通变换

$$z^{-1} = \frac{1}{F(\hat{z})} = \frac{1 - \alpha \hat{z}}{\hat{z} - \alpha}$$

$$\hat{z} = e^{j\hat{\omega}} \Rightarrow z^{-1} = e^{-j\omega} = \frac{1 - \alpha e^{j\hat{\omega}}}{e^{j\hat{\omega}} - \alpha} \Rightarrow \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \tan\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \tan\left(\frac{\hat{\omega}_c}{2}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{\sin\left(\frac{\omega_c - \hat{\omega}_c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_c + \hat{\omega}_c}{2}\right)}$$



$\alpha > 0$: 高频扩展

$\alpha < 0$: 低频扩展

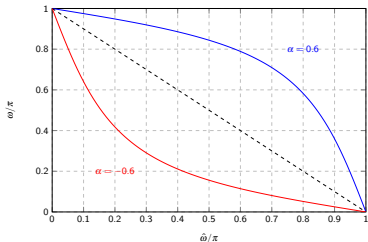
Lowpass to highpass

低通 → 高通变换

$$z^{-1} = \frac{1}{F(\hat{z})} = -\frac{1 - \alpha \hat{z}}{\hat{z} - \alpha}$$

$$\hat{z} = e^{j\hat{\omega}} \Rightarrow z^{-1} = e^{-j\omega} = -\frac{1 - \alpha e^{j\hat{\omega}}}{e^{j\hat{\omega}} - \alpha} \Rightarrow \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \cot\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \cot\left(\frac{\hat{\omega}_c}{2}\right) \Rightarrow \alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\omega_c + \hat{\omega}_c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_c - \hat{\omega}_c}{2}\right)}$$



$\alpha > 0$: 高频扩展

$\alpha < 0$: 低频扩展

Other shapes

带通和带阻的谱变换方法：【自学】参考书本第 361 页，表 9.1

Example 2

设计切比雪夫 1 型高通滤波器，指标为：

- 通带边界频率 $F_p = 700\text{Hz}$
- 阻带边界频率 $F_s = 500\text{Hz}$
- 通带波纹 $\alpha_p = 1\text{dB}$
- 阻带最小衰减 $\alpha_s = 32\text{dB}$
- 采样频率 $F_T = 2000\text{Hz}$

Example 2

- ① 归一化角频率 $\xrightarrow{\text{谱变换}}$ 低通滤波器器归一化角频率

$$\left. \begin{aligned} \omega_p &= \frac{2\pi F_p}{F_T} = 0.7\pi \\ \omega_s &= \frac{2\pi F_s}{F_T} = 0.5\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{\omega}_p &= \omega_s \\ \hat{\omega}_s &= \omega_p \end{aligned} \Rightarrow \alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\omega_p + \hat{\omega}_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_p - \hat{\omega}_p}{2}\right)} = 1$$

- ② 频率变换：离散时间 \rightarrow 连续时间

$$\hat{\Omega}_p = \tan(\hat{\omega}_p/2) = 1.0$$

$$\hat{\Omega}_s = \tan(\hat{\omega}_s/2) = 1.9626$$

- ③ 设计模拟低通滤波器 $H_a(s) \xrightarrow{\text{双线性变换}}$ 数字低通滤波器 $G_{LP}(z)$

- ④ 数字低通滤波器 $G_{LP}(z) \xrightarrow{\text{谱变换}}$ 数字高通滤波器 $G_{HP}(z)$

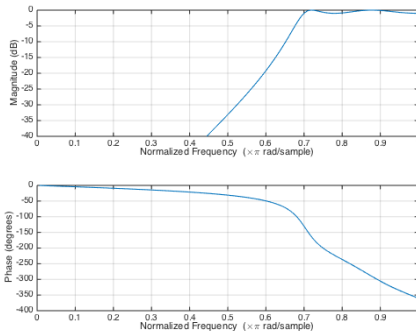
$$G_{HP}(z) = G_{LP}(z')|_{z' = -\frac{1-\alpha z}{z-\alpha}}$$

Example 2

MATLAB 实现

```

» [N,Wn] = cheb1ord(1,1.9626,1,32,'s');
» [B,A] = cheby1(N,1,Wn,'s');
» [num,den]=bilinear(B,A,0.5);
» [n0,d0] = iirlp2hp(num,den,0.7,0.5);
    
```



Design Digital Filter is Simple!

Filter Design & Analysis Tool - [untitled.fda *]

File Edit Analysis Targets View Window Help

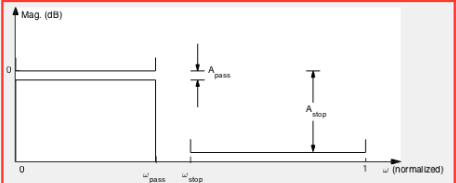
Current Filter Information

Structure: Direct-Form FIR
Order: 50
Stable: Yes
Source: Designed

Store Filter ...
Filter Manager ...

Filter Specifications

滤波器指标示意图



滤波器阶数设置

Response Type

☒ Lowpass
☐ Highpass
☐ Bandpass
☐ Bandstop
☐ Peaking

Design Method

☒ IIR Butterworth
☐ FIR Equiripple

Filter Order

☐ Specify order: 10
☒ Minimum order

Options

Match exactly: stop...

通带优先、阻带优先设置

Frequency Specifications

Units: Normalized (...)
Fs: 48000
wpass: 9600
wstop: 12000

频率指标

Magnitude Specifications

Units: dB
Apass: 1
Astop: 80

幅度指标

设置幅度响应类型: 低通、高通等等

Design Filter

Ready

Summary

通（阻）带边界频率：

ω_p, ω_s

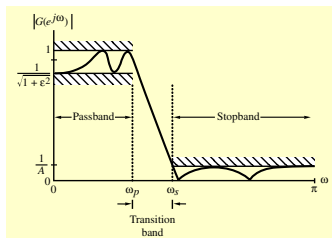
Input: 低通
数字滤波器指标

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

通（阻）带边界频率：

Ω_p, Ω_s

Specification Conversion:
模拟滤波器指标



模拟滤波器设计方法

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

Transform:
 $H_a(s) \rightarrow G(z)$

$$G(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)}$$

Analog Filter Design:
设计模拟滤波器 $H_a(s)$

$H_a(s)$

Outline

- 1 介绍
- 2 数字滤波器分类：基于幅度响应
 - 低通、高通、带通、带阻
 - 有界实传输函数
 - 全通滤波器
- 3 数字滤波器分类：基于相位响应
 - 零相位
 - 线性相位
 - 最大/小相位
- 4 数字滤波器分类：其他
- 5 数字滤波器设计方法
 - IIR 数字滤波器
 - 双线性变换
 - 谱变换
 - FIR 数字滤波器
 - 加窗冲激响应
 - 窗函数形状
 - 计算机辅助滤波器设计

FIR Filter Design

FIR

- No feedback (just **zeros**)
- Always **stable**
- Can be **linear phase**

BUT

- **High order** (20-2000)
- Unrelated to continuous-time filtering

IIR

- Feedback (**poles** & zeros)
- May be **unstable**
- **Difficult** to control phase
- Typ. < **1/10th order** of FIR (4-20)
- Derive from ***analog prototype***

FIR Filter Design

N 阶 FIR 滤波器传输函数

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n] z^{-n}$$

频率响应函数

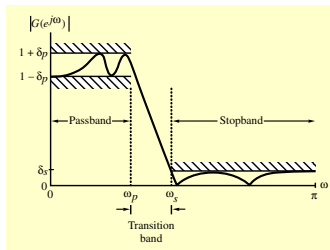
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n] e^{-j\omega n}$$

FIR Filter Design

通(阻)带边界频率:

$$\omega_p, \omega_s$$

Input: 低通
数字滤波器指标



Output:
设计 FIR 滤波器 $H_t(z)$

FIR 滤波器设计方法:

1. 加窗傅里叶级数
2. 计算机辅助方法

Windowed Impulse Response

$2M+1$ 点冲击响应序列 $h_t[n]$ $\xrightarrow{\text{最佳估计}}$ 滤波器频率响应 $H_d(e^{j\omega})$

最小积分平方误差准则：

$$\min_{h_t[n]} \left\{ \phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H_d(e^{j\omega}) - \overset{= DTFT\{h_t[n]\}}{H_t(e^{j\omega})} \right|^2 d\omega \right\}$$

Windowed Impulse Response

$2M+1$ 点冲击响应序列 $h_t[n]$ $\xrightarrow{\text{最佳估计}}$ 滤波器频率响应 $H_d(e^{j\omega})$

最小积分平方误差准则：

$$\min_{h_t[n]} \left\{ \begin{array}{l} \phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_d(e^{j\omega}) - \overset{= DTFT\{h_t[n]\}}{H_t(e^{j\omega})}|^2 d\omega \\ \xleftrightarrow{\text{Parseval}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_d[n] - h_t[n]|^2 \end{array} \right\}$$

Windowed Impulse Response

$2M+1$ 点冲击响应序列 $h_t[n]$ $\xrightarrow{\text{最佳估计}}$ 滤波器频率响应 $H_d(e^{j\omega})$

最小积分平方误差准则：

$$\min_{h_t[n]} \left\{ \begin{aligned} & \phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_d(e^{j\omega}) - \overset{= DTFT\{h_t[n]\}}{H_t(e^{j\omega})}|^2 d\omega \\ & \xleftrightarrow{\text{Parseval}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_d[n] - h_t[n]|^2 \\ & = \sum_{n=-M}^M |h_d[n] - h_t[n]|^2 + \sum_{|n|>M} |h_d[n]|^2 \end{aligned} \right\}$$

Windowed Impulse Response

$2M+1$ 点冲击响应序列 $h_t[n]$ $\xrightarrow{\text{最佳估计}}$ 滤波器频率响应 $H_d(e^{j\omega})$

最小积分平方误差准则：

$$\min_{h_t[n]} \left\{ \begin{aligned} & \phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_d(e^{j\omega}) - \overset{= DTFT\{h_t[n]\}}{H_t(e^{j\omega})}|^2 d\omega \\ & \xleftrightarrow{\text{Parseval}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_d[n] - h_t[n]|^2 \\ & = \sum_{n=-M}^M |h_d[n] - h_t[n]|^2 + \sum_{|n|>M} |h_d[n]|^2 \end{aligned} \right\}$$

最佳估计

$$h_t[n] = h_d[n], \quad \forall -M \leq n \leq M$$

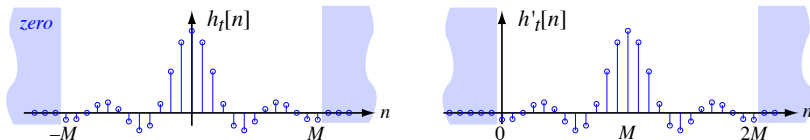
Windowed Impulse Response

以最小积分平方误差准则的最佳估计为

截断冲击响应

$$h_t[n] = \begin{cases} IDTFT\{H_d(e^{j\omega})\} & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

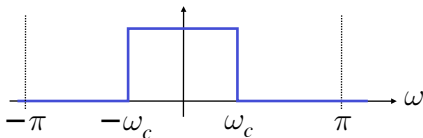
为了使系统为因果的，则需要延迟 M 点使得 $h'_t[n] = 0, \forall n < 0$



Approximating Ideal Filters

- From topic 6,
ideal lowpass
has:

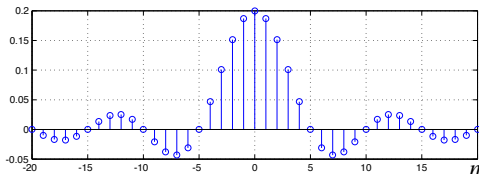
$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$



and:

$$h_{LP}[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$

(doubly infinite)

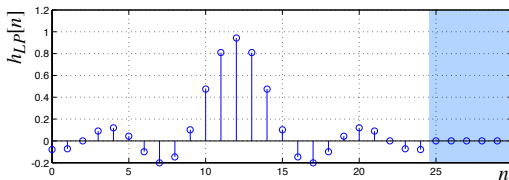


Approximating Ideal Filters

- Thus, **minimum ISE** **causal** approximation to an **ideal lowpass**

$$\hat{h}_{LP}[n] = \begin{cases} \frac{\sin \omega_c (n-M)}{\pi (n-M)} & 0 \leq n \leq 2M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

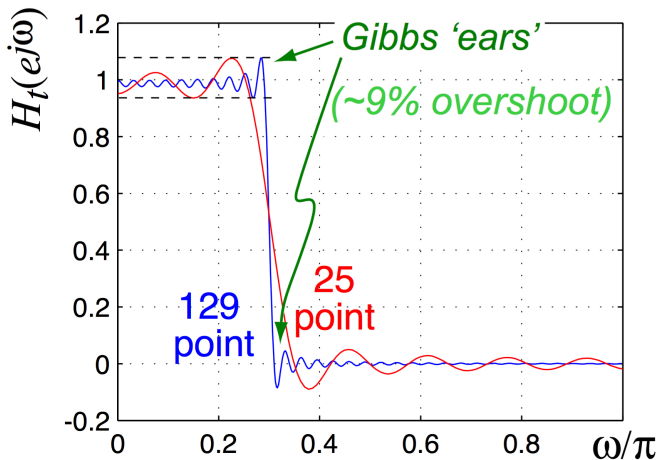
Causal shift



2M+1 points

Gibbs 现象

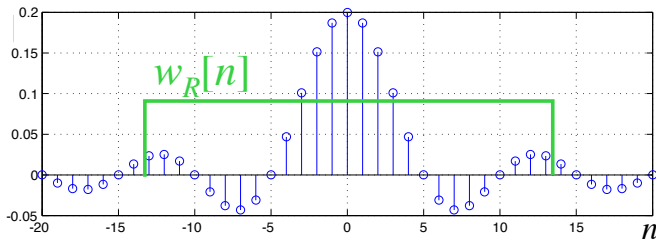
增大 FIR 滤波器的长度，并不能减少通带和阻带的波纹幅度，这种现象称为吉布斯现象



Gibbs 现象产生的原因

截断 \Leftrightarrow 乘以窗函数

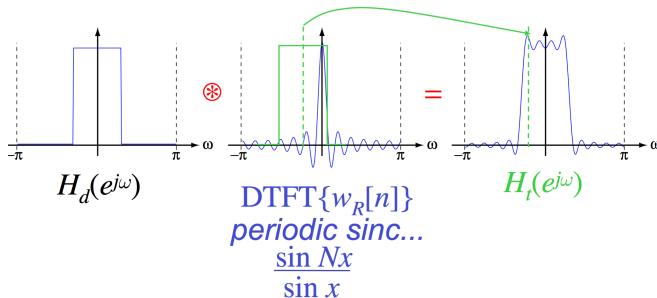
$$h_t[n] = h_d[n] \cdot w_R[n], \quad w_R[n] = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



Gibbs 现象产生的原因

时域乘积 \Leftrightarrow 频域卷积

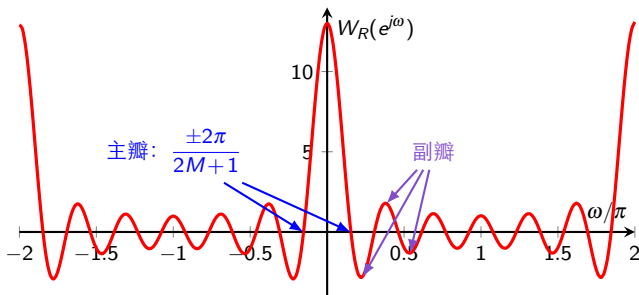
$$h_d[n] \cdot w_R[n] \longleftrightarrow H_d(e^{j\omega}) \otimes W_R(e^{j\omega})$$



Gibbs 现象产生的原因

矩形窗函数的 DTFT 变换

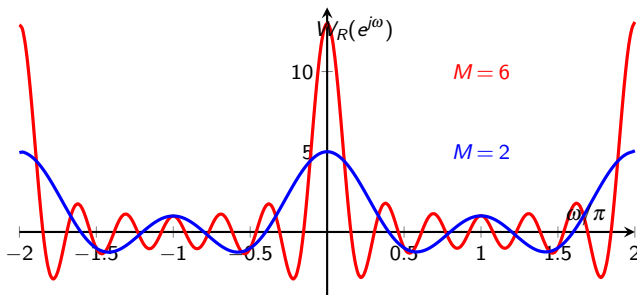
$$w_R[n] = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \Rightarrow W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M e^{-j\omega n} = \frac{\sin(2M+1)\frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$



Gibbs 现象产生的原因

矩形窗函数的 DTFT 变换

$$w_R[n] = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \Rightarrow W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M e^{-j\omega n} = \frac{\sin(2M+1)\frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$



Dirichlet Kernel

Dirichlet Kernel:

$$D_N(x) = \frac{\sin((N+0.5)x)}{\sin(0.5x)} = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nx)$$

- 周期：周期为 2π
- 均值： $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} D_N(x) dx = 1$
- 第一零点： $D_N(x) = 0$ at $x = \pm \frac{\pi}{N+0.5}$
- 峰值： $D_N(0) = 2N+1$
- 主瓣积分（当 N 足够大的时候，与 N 无关）：

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{N+0.5}} D_N(x) dx &= \frac{1}{N+0.5} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sin \frac{y}{2N+1}} dy \\ &\approx \frac{1}{N+0.5} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\frac{y}{2N+1}} dy \approx 2\pi \times 0.58949 \end{aligned}$$

Gibbs Phenomenon I

$$\begin{aligned}
 H_t(\omega) &= \frac{1}{2\pi} H_d \otimes D_M \quad (D_M = W_R) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} H_d(\tau) D_M(\omega - \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} D_M(\tau - \omega) d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega - \omega_c}^{\omega + \omega_c} D_M(x) dx
 \end{aligned}$$

- When $\omega = \omega_c$

$$\begin{aligned}
 H_t(\omega_c) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\omega_c} D_M(x) dx \\
 &\approx \frac{1}{2\pi} \frac{1}{M+0.5} \int_0^{(2M+1)\omega_c} \frac{\sin y}{\sin \frac{y}{2N+1}} dy \\
 &\xrightarrow{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = 0.5
 \end{aligned}$$

Gibbs Phenomenon II

- When $\omega = \omega_c - \frac{\pi}{M+0.5}$ (第一零点)

$$\begin{aligned}
 H_t(\omega_c - \frac{\pi}{M+0.5}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{M+0.5}}^{2\omega_c - \frac{\pi}{M+0.5}} D_M(x) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{M+0.5}}^0 D_M(x) dx + \int_0^{2\omega_c - \frac{\pi}{M+0.5}} D_M(x) dx \right) \\
 &\approx 1 \times 0.58949 + 0.5 = 1 + 0.08949
 \end{aligned}$$

- When $\omega \rightarrow 0$ (靠近中心)

$$\begin{aligned}
 \lim_{\omega \rightarrow 0} H_t(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} D_M(x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\omega_c} D_M(x) dx \right) \\
 &\approx 1
 \end{aligned}$$

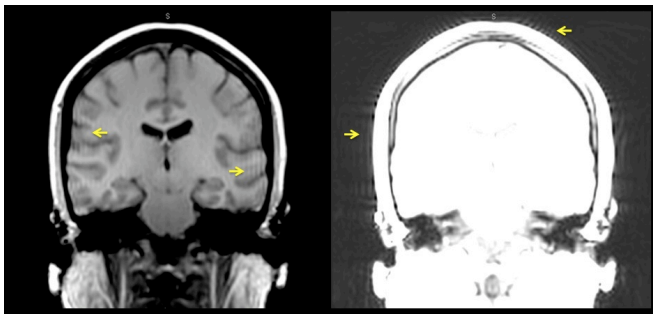


Gibbs 现象产生的原因

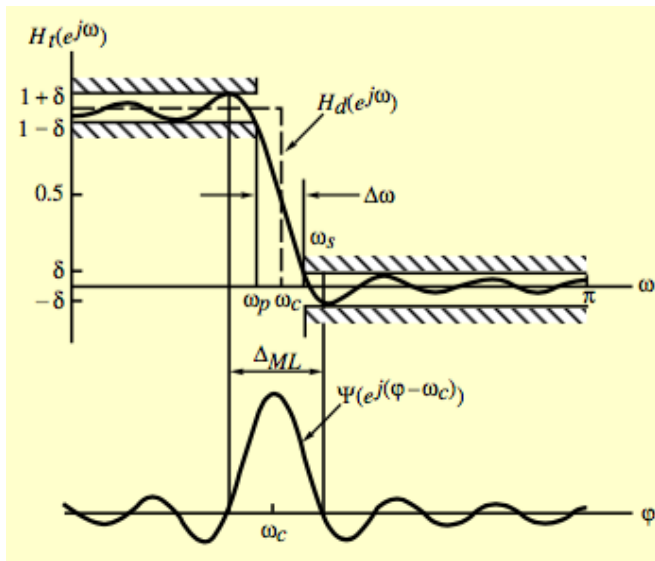
当 $M=6$ 时

当 $M=9$ 时

Gibbs in Real Life



滤波器指标与窗函数的关系



滤波器指标与窗函数的关系

主瓣宽度 \Rightarrow FIR 滤波器的过渡带带宽

$$\Delta_{ML} = \frac{4\pi}{2M+1}$$

增大滤波器长度，可以减小主瓣宽度，从而减小过渡带带宽

副瓣幅度 \Rightarrow FIR 滤波器的通带或者阻带振荡

关于滤波器长度，副瓣幅度几乎恒定不变，因此通带或阻带振荡不能通过增大滤波器长度来抑制

滤波器指标与窗函数的关系

主瓣宽度 \Rightarrow FIR 滤波器的过渡带带宽

$$\Delta_{ML} = \frac{4\pi}{2M+1}$$

增大滤波器长度，可以减小主瓣宽度，从而减小过渡带带宽

副瓣幅度 \Rightarrow FIR 滤波器的通带或者阻带振荡

关于滤波器长度，副瓣幅度几乎恒定不变，因此通带或阻带振荡不能通过增大滤波器长度来抑制

采用不同的窗函数

Windowed Impulse Response

$$h_t[n] = h_d[n] \cdot w_R[n]$$

其他窗函数

Window Shapes for FIR Filters

- Rectangular:

$$w[n] = 1 \quad -M \leq n \leq M$$

- Hann:

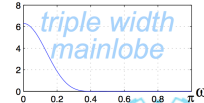
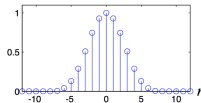
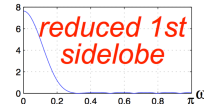
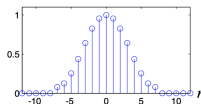
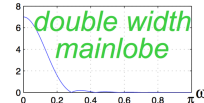
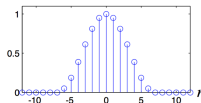
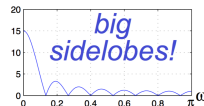
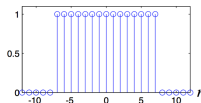
$$0.5 + 0.5 \cos(2\pi \frac{n}{2M+1})$$

- Hamming:

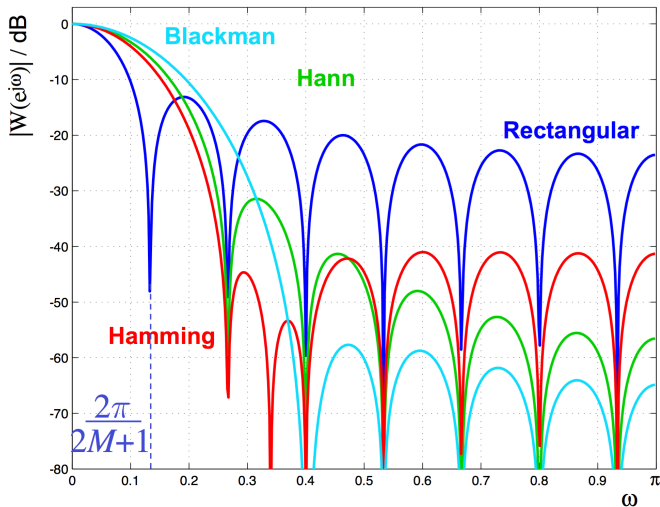
$$0.54 + 0.46 \cos(2\pi \frac{n}{2M+1})$$

- Blackman:

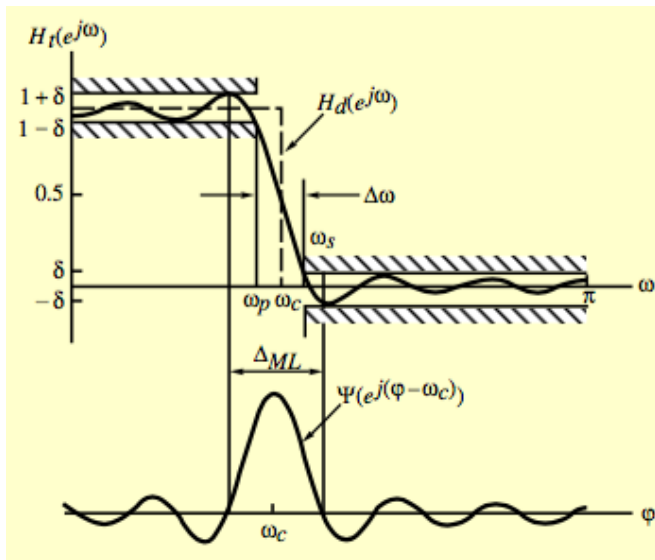
$$0.42 + 0.5 \cos(2\pi \frac{n}{2M+1}) + 0.08 \cos(2\pi \frac{2n}{2M+1})$$



Window Shapes for FIR Filters



Relationship between filter spec. and window shapes



Properties of Windows

主瓣宽度 相对旁瓣电平 最小阻带衰减 过渡带带宽

窗函数	Δ_{ML}	A_{sl}	α_s	$\Delta\omega$
矩形窗	$\frac{4\pi}{2M+1}$	13.3dB	29.9dB	$0.92\pi/M$
Hann 窗	$\frac{8\pi}{2M+1}$	31.5dB	43.9dB	$3.11\pi/M$
汉明窗	$\frac{8\pi}{2M+1}$	42.7dB	54.5dB	$3.32\pi/M$
Blackman 窗	$\frac{12\pi}{2M+1}$	58.1dB	75.3dB	$5.56\pi/M$

Steps to Design FIR Filter

固定窗函数 FIR 滤波器设计步骤：

- 1 确定中心频率

$$\omega_c \approx \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$$

- 2 根据最小阻带衰减 α_s 确定窗函数类型
- 3 估计滤波器阶数

$$\Delta\omega = |\omega_s - \omega_p| \approx \frac{c}{M}$$

Example

设计满足要求的 FIR 低通滤波器：通带边界频率 $\omega_p = 0.3\pi$ ，阻带边界频率 $\omega_s = 0.5\pi$ ，最小阻带衰减 $\alpha_s = 40\text{dB}$

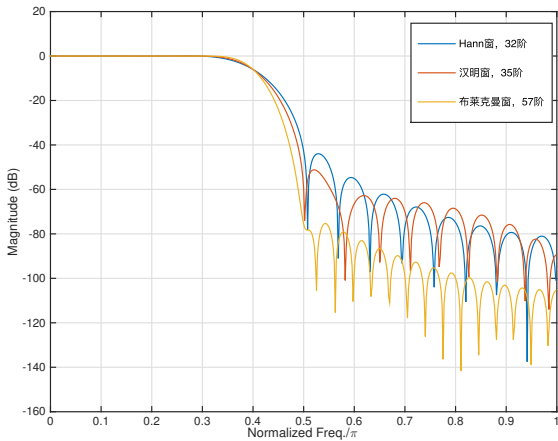
设计步骤：

- 1 确定中心频率 $\omega_c \approx \frac{\omega_p + \omega_s}{2} = 0.4\pi$
- 2 最小阻带衰减 $\alpha_s = 40\text{dB} \Rightarrow$ 查表可知能够采用 Hann 窗、汉明窗和布莱克曼窗
- 3 滤波器阶数

$$\Delta\omega = |\omega_s - \omega_p| = 0.2\pi \approx \frac{c}{M}$$

$$\Rightarrow M \geq \begin{cases} 15.55 & \text{Hann 窗} \\ 16.6 & \text{汉明窗} \\ 27.8 & \text{布莱克曼窗} \end{cases}$$

Example



Adjustable Windows

固定窗函数

- 矩形窗、汉宁窗、汉明窗和布莱克曼窗
- *FIR* 滤波器波纹都是固定的

可调节窗函数: 可以通过调整某个参数来控制波纹大小

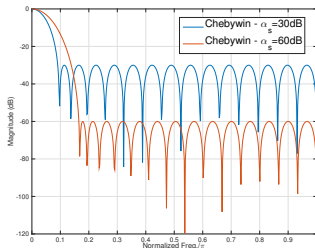
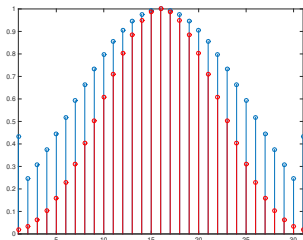
- 多尔夫-切比雪夫 (*Dolph-Chebyshev*) 窗
- *Kaiser* 窗

Dolph-Chebyshev Window

长度为 $2M+1$ 的 Dolph-Chebyshev 窗函数定义为

$$w_D[n] = \frac{1}{2M+1} \left[\frac{1}{\gamma} + 2 \sum_{k=1}^M T_{2M} \left(\beta \cos \frac{k\pi}{2M+1} \cos \frac{2n\pi}{2M+1} \right) \right], -M \leq n \leq M$$

相对旁瓣振幅

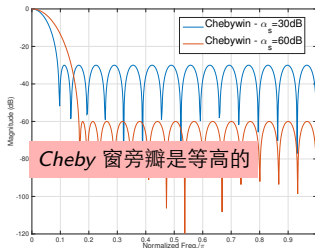
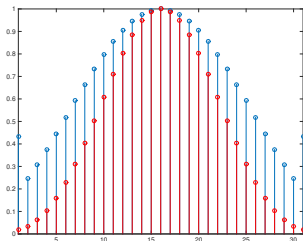


Dolph-Chebyshev Window

长度为 $2M+1$ 的 Dolph-Chebyshev 窗函数定义为

$$w_D[n] = \frac{1}{2M+1} \left[\frac{1}{\gamma} + 2 \sum_{k=1}^M T_{2M} \left(\beta \cos \frac{k\pi}{2M+1} \cos \frac{2n\pi}{2M+1} \right) \right], -M \leq n \leq M$$

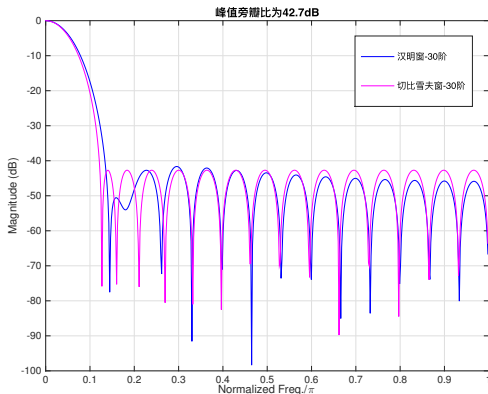
相对旁瓣振幅



Dolph-Chebyshev v.s. Hamming

长度为 31 的切比雪夫窗与汉明窗：

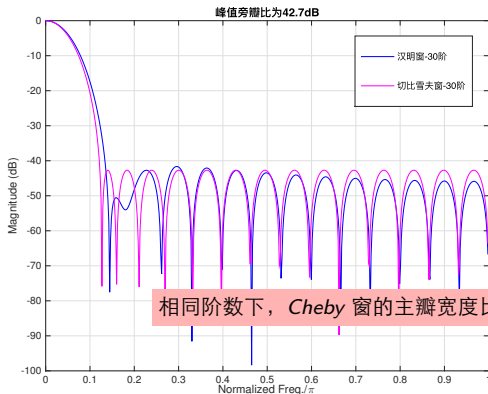
- 汉明窗 - 主瓣宽度 $\Delta_{ML} = \frac{8\pi}{31} \approx 0.2581\pi$
- 切比雪夫窗 - 主瓣宽度 $\Delta_{ML} \approx 0.24\pi$



Dolph-Chebyshev v.s. Hamming

长度为 31 的切比雪夫窗与汉明窗：

- 汉明窗 - 主瓣宽度 $\Delta_{ML} = \frac{8\pi}{31} \approx 0.2581\pi$
- 切比雪夫窗 - 主瓣宽度 $\Delta_{ML} \approx 0.24\pi$



Properties of Dolph-Chebyshev Window

切比雪夫窗的性质：

- 所有旁瓣幅度一样
- 对于相同长度窗，相比其他窗函数，具有最窄主瓣宽度

Kaiser Window

长度为 $2M+1$ 的 Kaiser 窗定义为

$$w_K[n] = \frac{I_0 \left(\beta \sqrt{1 - (n/M)^2} \right)}{I_0(\beta)}, \quad -M \leq n \leq M$$

修正的零阶贝塞尔函数 可调参数

可调参数 β 的经验取值

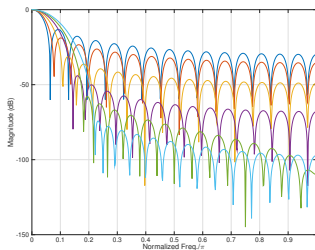
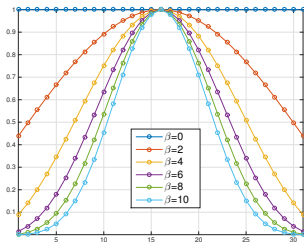
$$\beta = \begin{cases} 0.11(\alpha_s - 8.7), & \alpha_s > 50\text{dB} \\ 0.58(\alpha_s - 21)^{0.4} + 0.08(\alpha_s - 21), & 21 \leq \alpha_s \leq 50 \\ 0, & \alpha_s < 21 \end{cases}$$

阶数估计

$$N = \frac{\alpha_s - 8}{2.3\Delta\omega}$$

Kaiser Window

窗函数与可调参数 β 之间的关系:



- β 越大 \Rightarrow 主瓣宽度越大
- β 越大 \Rightarrow 相对旁瓣电平越小

Example

设计满足要求的 FIR 低通滤波器：通带边界频率 $\omega_p = 0.3\pi$ ，阻带边界频率 $\omega_s = 0.5\pi$ ，最小阻带衰减 $\alpha_s = 40\text{dB}$

设计步骤：

- 1 确定中心频率 $\omega_c \approx \frac{\omega_p + \omega_s}{2} = 0.4\pi$
- 2 最小阻带衰减 $\alpha_s = 40\text{dB}$
- 3 滤波器阶数

$$N \geq \frac{\alpha_s - 8}{2.3\Delta\omega} = \frac{40 - 8}{2.3 \times (0.5\pi - 0.3\pi)} = 22.3 \Rightarrow N = 23$$

- 4 计算可调参数

$$\beta = 0.58(\alpha_s - 21)^{0.4} + 0.08(\alpha_s - 21) = 3.4033$$

Example

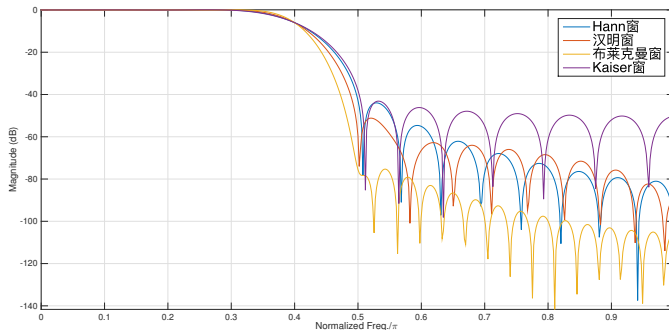


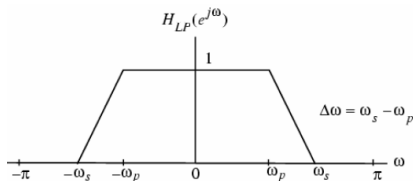
表 1: 每种滤波器设计所需长度

	Hann 窗	汉明窗	Blackman 窗	Kaiser 窗
阶数	32	35	57	23

Smooth Transition

$$h_t[n] = h_d[n] \cdot w_R[n]$$

具有平滑过渡区



$$h_{LP}[n] = IDTFT\{H_{LP}(e^{j\omega})\}$$

Smooth Transition

已知 $H_{LP}(e^{j\omega})$ 的微分

$$G(e^{j\omega}) = \frac{dH_{LP}}{d\omega} = \begin{cases} 0, & \omega_s \leq |\omega| \leq \pi \\ \Delta\omega, & -\omega_s \leq \omega \leq -\omega_p \\ -\Delta\omega, & \omega_p \leq \omega \leq \omega_s \end{cases} \xrightarrow{\text{IDTFT}} g[n]$$

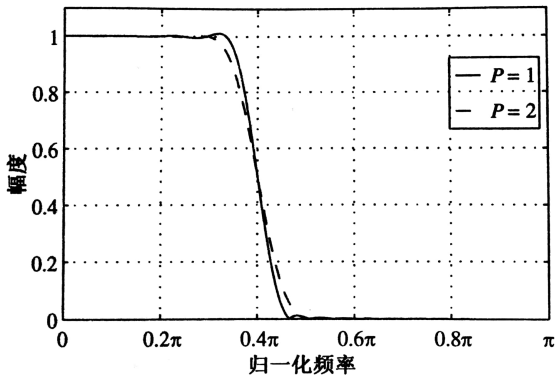
可得到

$$h_{LP}[n] = jg[n]/n = \begin{cases} \omega_c/\pi, & n = 0 \\ \left(\frac{\sin(\Delta\omega n/2)}{\Delta\omega n/2} \right) \cdot \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}, & |n| > 0 \end{cases}$$

如果用 P 阶样条函数来作为过渡函数

$$h_{LP}[n] = \begin{cases} \omega_c/\pi, & n = 0 \\ \left(\frac{\sin(\Delta\omega n/2P)}{\Delta\omega n/2P} \right)^P \cdot \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}, & |n| > 0 \end{cases}$$

Example

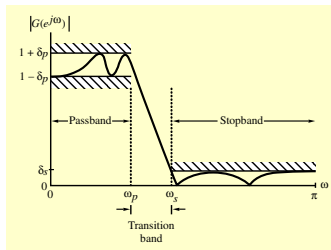


FIR 数字滤波器设计流程图

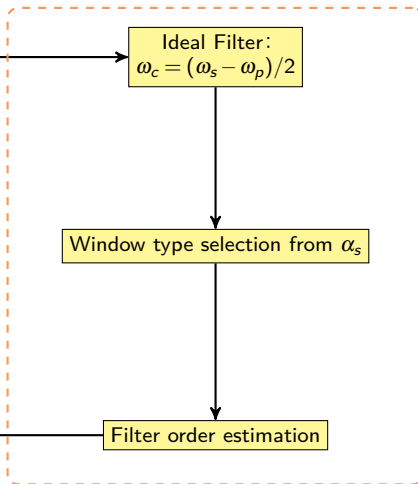
通（阻）带边界频率：

$$\omega_p, \omega_s$$

Input:
数字滤波器指标



Output:
设计 FIR 滤波器 $H_t(z)$





Outline

1 介绍

2 数字滤波器分类：基于幅度响应

- 低通、高通、带通、带阻
- 有界实传输函数
- 全通滤波器

3 数字滤波器分类：基于相位响应

- 零相位
- 线性相位
- 最大/小相位

4 数字滤波器分类：其他

5 数字滤波器设计方法

- IIR 数字滤波器
 - 双线性变换
 - 谱变换
- FIR 数字滤波器
 - 加窗冲激响应
 - 窗函数形状
- 计算机辅助滤波器设计

Computer Aided Design

- IIR 滤波器的计算机辅助设计
- FIR 滤波器的计算机辅助设计

IIR Filter Design via Optimization

IIR 传输函数为

$$H(z) = C \frac{1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_M z^{-M}}{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_N z^{-N}}$$

那么设计 IIR 滤波器就是要估计这些系数

$$\mathbf{x} \triangleq \{p_1, \dots, p_M, d_1, \dots, d_N, C\}^T$$

Objective

$$H(\mathbf{x}, \omega) \triangleq H(e^{j\omega}) \rightarrow D(e^{j\omega})$$

Basic Idea

加权误差函数：

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \omega) = W(\omega) \cdot [H(\mathbf{x}, \omega) - D(e^{j\omega})]$$

Optimization Problem

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}} \mathcal{E}(\mathbf{x}) \triangleq \sum_{i=1}^K |\mathcal{E}(\omega_i)|^p$$

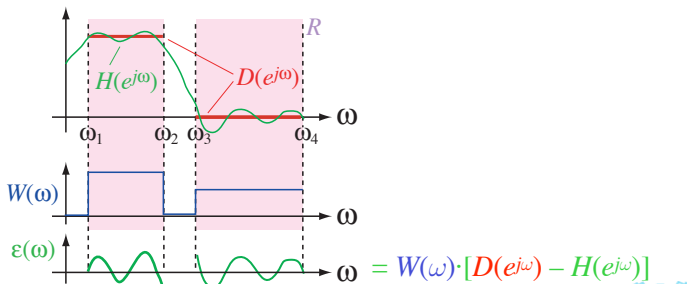
对应不同的 p 的取值：

- $p = \infty$ ，则为切比雪夫准则或者极小化最大准则
- $p = 2$ ，则为最小平方准则
- p 为其他值，则为最小 p 准则

Error Criteria

$$\varepsilon = \int_{\omega \in R} \left| W(\omega) \cdot [D(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})] \right|^p d\omega$$

error measurement region \rightarrow $\omega \in R$
 $W(\omega)$ error weighting \rightarrow
 $D(e^{j\omega})$ desired response \rightarrow
 $H(e^{j\omega})$ actual response \rightarrow
 exponent: $2 \rightarrow$ least sq, $\infty \rightarrow$ minimax

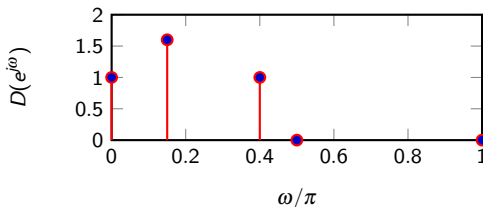


Matlab example

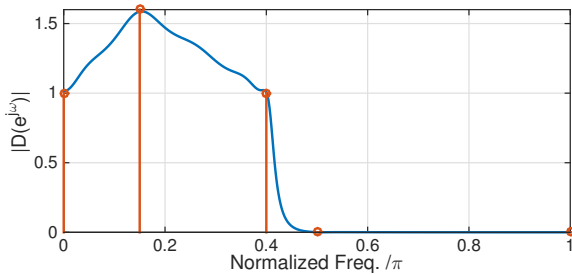
Matlab 中的函数 `iirlpnorm` 来设计 IIR 滤波器

```

1  [b,a] = ... % 输出IIR滤波器的传输函数的系数
2  iirlpnorm(... % 最优化方法设计IIR滤波器
3  5,... % 分子多项式的阶数 M
4  12,...% 分母多项式的阶数 N
5  [0 .15 .4 .5 1],... % 具有约束的5个频点
6  [0 .4 .5 1],... % 边界频率 (包含了0和1)
7  [1 1.6 1 0 0],... % 对应5个频率点的约束 -  $D(e^{j\omega})$ 
8  [1 1 1 10 10]); % 对应5个频率点的权值系数 -  $W(\omega)$ 
9  ~I
    
```



Matlab example



Computer Aided Design

- IIR 滤波器的计算机辅助设计
- FIR 滤波器的计算机辅助设计

FIR Filter Design via Optimization

N 阶 FIR 滤波器传输函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-n}$$

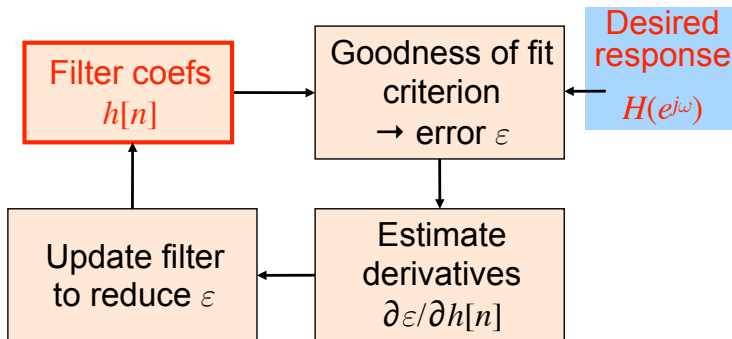
那么设计 FIR 滤波器 \rightarrow 估计 $N+1$ 个系数

$$\mathbf{x} \triangleq \{h[0], h[1], \dots, h[N]\}$$

Objective

$$H(\mathbf{x}, \omega) \triangleq H(e^{j\omega}) \rightarrow D(e^{j\omega})$$

Iterative FIR Filter Design



Linear Phase FIR via Parks-MaClellan Method

线性相位 FIR 滤波器的一般形式

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2} e^{j\beta} \tilde{H}(\omega)$$

其中, $\tilde{H}(\omega)$ 为实数, 且具有与 $H(e^{j\omega})$ 相同的幅度响应。
期望的振幅响应为

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{在通带中} \\ 0, & \text{在阻带中} \end{cases}$$

权重函数

$$W(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{在通带中} \\ \delta_p/\delta_s, & \text{在阻带中} \end{cases}$$

Linear Phase FIR via Parks-MaClellan Method

切比雪夫准则或者极小化最大准则FIR 滤波器设计

Optimization Problem

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \varepsilon(\mathbf{x}) \triangleq \max_{\omega \in [0, \pi]} |\mathcal{E}(\mathbf{x}, \omega)| \right\}$$

加权误差函数：

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{x}, \omega) &= W(\omega) \cdot [H(\mathbf{x}, \omega) - D(e^{j\omega})] \\ &= W(\omega) \cdot [\tilde{H}(\mathbf{x}, \omega) - D(e^{j\omega})] \end{aligned}$$

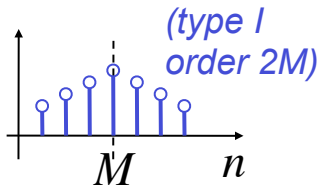
那么 $\mathcal{E}(\mathbf{x}, \omega)$ 的极值点 ω^* 满足

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \omega} = 0 \xrightarrow{W \text{ 和 } D \text{ 为分段常值函数}} \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \omega} = \frac{\partial \tilde{H}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \omega} = 0$$

Type 1 Linear Phase FIR

对已第一类线性相位 FIR 系统, N 为偶数, 滤波器长度为 $N+1$ -奇数

$$h[n] = h[-n]$$



那么

$$\tilde{H}(x, \omega) = \sum_{k=0}^{N/2} a[k] \cos(k\omega)$$

其中 $a[k] = 2h[N/2 - k]$, $a[0] = h[N/2]$.

Chebyshev Polynomials

$$\tilde{H}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{k=0}^{N/2} a[k] \cos(k\omega) = \sum_{k=0}^{N/2} \alpha[k] \cos^k(\omega)$$

利用关系：

$$\cos(k\omega) = T_k(\cos(\omega))$$

切比雪夫多项式（迭代递推公式）：

$$T_k(x) = \cos(k \cos^{-1} x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$$

其中 $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$

$$\cos(0\omega) = T_0(\cos \omega) = 1$$

$$\cos(1\omega) = T_1(\cos \omega) = \cos \omega$$

$$\cos(2\omega) = T_2(\cos \omega) = 2\cos^2 \omega - 1$$

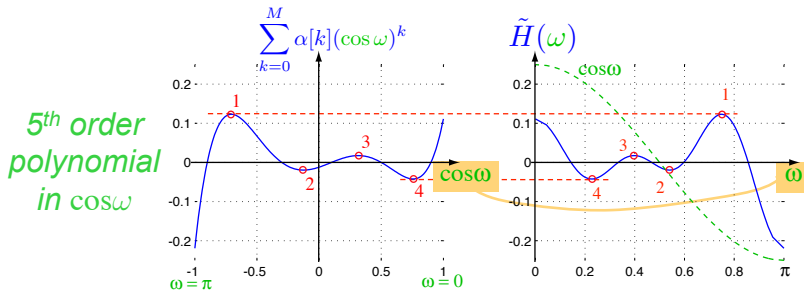
$$\cos(3\omega) = T_3(\cos \omega) = 4\cos^3 \omega - 3\cos \omega$$

...

Linear Phase FIR via Parks-MaClellan Method

$$\tilde{H}(x, \omega) = \sum_{k=0}^{N/2} \alpha[k] \cos^k(\omega)$$

$M \triangleq N/2$ 阶多项式最多只有 $M-1$ 个极值：



因此 $\tilde{H}(x, \omega)$ 最多有 $M-1$ 个极值 \Rightarrow 波纹

Alternation Theorem

交错定理:

$\tilde{H}(\mathbf{x}, \omega)$ 为所求振幅响应 $D(e^{j\omega})$ 的唯一最佳近似, **当且仅当**

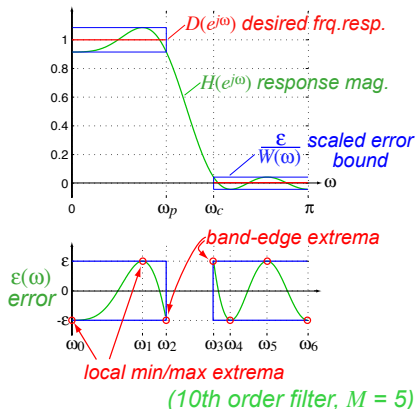
- $\varepsilon(\mathbf{x}, \omega)$ 至少存在 $M+2$ 个极值点 $\omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_M < \omega_{M+1}$
- 误差函数 ε 在极值点处振幅相等

$$|\varepsilon(\mathbf{x}, \omega_i)| = \varepsilon \quad \forall i$$

- 误差函数峰值的符号是交错的

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \omega_i) = -\varepsilon(\mathbf{x}, \omega_{i+1})$$

Alternation Theorem

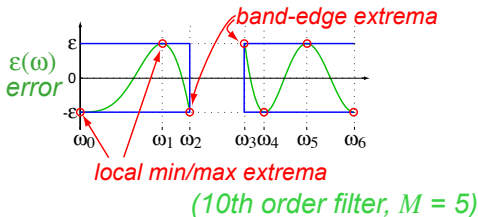


- **If** $\epsilon(\omega)$ reaches a **peak** error magnitude ϵ at some set of **extremal frequencies** ω_i
- **And** the *sign* of the peak error **alternates**
- **And** we have at least $M+2$ of them
- **Then** **optimal minimax**



Alternation Theorem

交错定理需要至少有 $M+2$ 个符号交替变化的极值点，但是 $\tilde{H}(\mathbf{x}, \omega)$ 最多只有 $M-1$ 个极值点

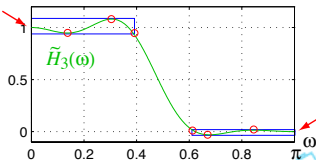
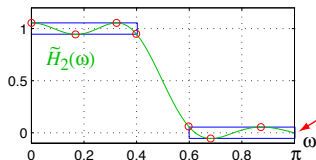
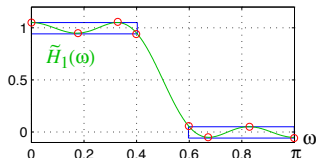


- 通带（阻带）边界频率点可能可以提供 4 个极值点 \Rightarrow 误差函数 $\varepsilon(\mathbf{x}, \omega)$ 可能至多具有 $M+3$ 个极值点

交错定理

■ For $M = 5$ (10th order):

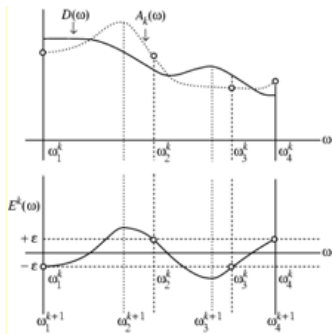
- 8 extrema ($M+3$, 4 band edges)
 - **great!**
- 7 extrema ($M+2$, 3 band edges)
 - **OK!**
- 6 extrema ($M+1$, only 2 transition band edges)
 - **NOT OPTIMAL**



Parks-McClellan Algorithm

- To recap:
 - FIR CAD constraints
$$D(e^{j\omega}), W(\omega) \rightarrow \varepsilon(\omega)$$
 - Zero-phase FIR
$$\tilde{H}(\omega) = \sum_k \alpha_k \cos^k \omega \rightarrow M-1 \text{ min/max}$$
 - Alternation theorem
optimal $\rightarrow \geq M+2$ pk errs, alter'ng sign
- Hence, can **spot** 'best' filter when we see it – but how to **find** it?

Parks-McClellan Algorithm



Remez 交换算法 - 确定极值频率的位置 \rightarrow FIR 滤波器的冲击响应 $h[n]$

- ① 估计 (初始化) $M+2$ 个极值点 $\{\omega_i\}$
- ② 求解 $\alpha[n], \varepsilon \rightarrow$ 冲击响应 $h[n]$
- ③ 计算 $\varepsilon(\mathbf{x}, \omega)$ 的极值位置 \rightarrow 更新 $\{\omega_i\}$
- ④ 返回步骤 2, 迭代直至 $|\varepsilon(\mathbf{x}, \omega_i)|$ 为常数

Matlab example

Matlab 中的函数 *firpm* 来设计 FIR 滤波器

```
>> h=firpm(10, [0 0.4 0.6 1],
            [1 1 0 0],
            [1 2])
```

filter order (2M) points to 10
band edges $\div \pi$ points to [0 0.4 0.6 1]
desired magnitude at band edges points to [1 1 0 0]
error weights per band points to [1 2]

