

武汉大学

信号处理研究室

dsp.whu.edu.cn

# 《数字信号处理》

Digital Signal Processing

余磊 副教授

武汉大学电子信息学院

Email: ly.wd@whu.edu.cn

本科生课程, 2018 秋

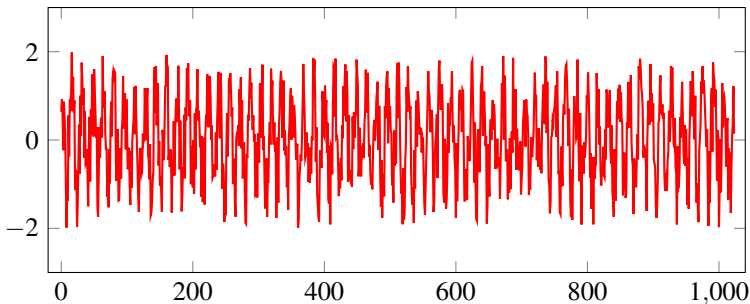


# Outline

- 1 介绍
- 2 有限长离散正交变换
- 3 DFT 变换
  - 定义
  - DFT 变换与 DTFT 变换的关系
  - 有限长序列的分类
  - IDFT 变换
  - DFT 变换的定理
  - DFT 变换的性质
- 4 DFT 变换与卷积
  - DFT 变换与圆周卷积
  - DFT 变换与线性卷积
- 5 离散余弦变换
- 6 Haar 变换
- 7 小结

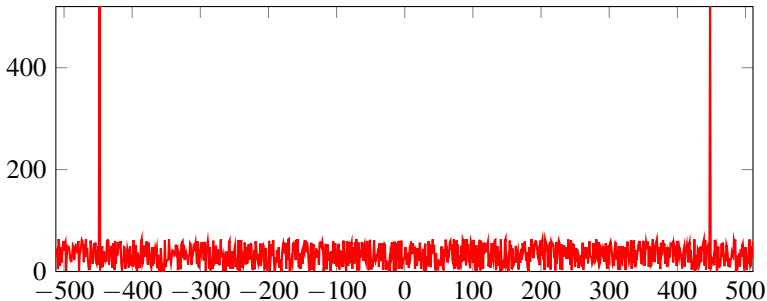
# 实际信号的分析

$$x(t) = \cos(2\pi ft) + e(t)$$



# 信号的频域分析

$$x(t) = \cos(2\pi ft) + e(t)$$



# 傅里叶分析

- 傅里叶分析

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \Leftrightarrow X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

- 时间  $t$ : 单位  $s$ 、连续
- 频率  $f$ : 单位  $Hz$ 、连续
- 连续傅里叶仅仅是一种分析方法。

# 傅里叶分析

- 傅里叶分析

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \Leftrightarrow X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

- 时间  $t$ : 单位  $s$ 、连续
- 频率  $f$ : 单位  $Hz$ 、连续
- 连续傅里叶仅仅是一种分析方法。

Question: 实际处理如何操作?

# 为什么要研究 DFT 变换?

计算机只能处理**离散**、**有限长**信号。不能处理连续、无限长信号。

- 连续时间傅里叶变换 (Continuous Fourier Transform - CFT)

- ✗ 时间连续
- ✗ 频率连续

- 离散时间傅里叶变换 (Discrete-time Fourier Transform - DTFT)

- ✓ 时间离散
- ✗ 无限长序列
- ✗ 频率连续

- **有限长**+**离散时间**变换

- ✓ 时间离散
- ✓ 频率离散
- ✓ 有限长序列



# Outline

- 1 介绍
- 2 有限长离散正交变换
- 3 DFT 变换
  - 定义
  - DFT 变换与 DTFT 变换的关系
  - 有限长序列的分类
  - IDFT 变换
  - DFT 变换的定理
  - DFT 变换的性质
- 4 DFT 变换与卷积
  - DFT 变换与圆周卷积
  - DFT 变换与线性卷积
- 5 离散余弦变换
- 6 Haar 变换
- 7 小结



# 有限长离散正交变换

- 正交变换对:

$$\mathcal{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \psi^*[k, n], \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X}[k] \psi[k, n], \quad 0 \leq n \leq N-1$$

- 矩阵形式,  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^N, \Psi \in \mathbb{R}^{N \times N}$

$$\mathcal{X} = \Psi^* \mathbf{X}$$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{N} \Psi \mathcal{X}$$

# 分析式和综合式

- 分析式  $\Leftrightarrow$  信号分解

$$\mathcal{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \psi^*[k, n], \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\mathcal{X} = \Psi^H \mathbf{X}$$

- 综合式  $\Leftrightarrow$  信号合成

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X}[k] \psi[k, n], \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{N} \Psi \mathcal{X}$$

# 正交变换基

- 变换基:  $\psi[k, n]$  或者矩阵形式  $\Psi$
- 变换基的正交性:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \psi[k, n] \psi^*[l, n] = \delta[l - k] = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}$$

- 矩阵形式:

$$\frac{1}{N} \Psi \Psi^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

# 逆变换

- 逆变换的正确性:

$$\mathcal{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \psi^*[k, n]$$

# 逆变换

- 逆变换的正确性:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \psi^*[k, n] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{X}[l] \psi[l, n] \right] \psi^*[k, n]\end{aligned}$$

# 逆变换

- 逆变换的正确性:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \psi^*[k, n] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{X}[l] \psi[l, n] \right] \psi^*[k, n] \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{X}[l] \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \psi[l, n] \psi^*[k, n] \right]\end{aligned}$$

# 逆变换

- 逆变换的正确性:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \psi^*[k, n] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{X}[l] \psi[l, n] \right] \psi^*[k, n] \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{X}[l] \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \psi[l, n] \psi^*[k, n] \right] \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{X}[l] \delta[l - k] = \mathcal{X}[k]\end{aligned}$$

# 逆变换

- 逆变换的正确性:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \psi^*[k, n] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{X}[l] \psi[l, n] \right] \psi^*[k, n] \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{X}[l] \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \psi[l, n] \psi^*[k, n] \right] \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{X}[l] \delta[l - k] = \mathcal{X}[k]\end{aligned}$$

- 矩阵形式验证:

$$\mathcal{X} = \Psi \mathbf{X} = \Psi \left( \frac{1}{N} \Psi^H \mathcal{X} \right) = \mathcal{X}$$



# 有限长离散正交变换的帕塞瓦尔定理

- 任意有限长离散正交变换, 都满足帕塞瓦尔定理
- 信号的能量可以表示为:  $\|\mathbf{X}\|_2^2 = \mathbf{X}^H \mathbf{X}$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{X}\|_2^2 &= \mathbf{X}^H \mathbf{X} = \frac{1}{N} (\Psi \mathcal{X})^H \mathbf{X} \\ &= \frac{1}{N} \mathcal{X}^H (\Psi^H \mathbf{X}) \\ &= \frac{1}{N} \mathcal{X}^H \mathcal{X} = \frac{1}{N} \|\mathcal{X}\|_2^2\end{aligned}$$

- 基序列的正交性保证了变换的能量保持性

# 常见的几种有限长离散正交变换

- 离散傅里叶变换 (DFT)
- 离散余弦变换 (DCT)
- 短时傅里叶变换 (STFT)
- 小波变换 (Wavelet)

# Outline

- 1 介绍
- 2 有限长离散正交变换
- 3 DFT 变换
  - 定义
  - DFT 变换与 DTFT 变换的关系
  - 有限长序列的分类
  - IDFT 变换
  - DFT 变换的定理
  - DFT 变换的性质
- 4 DFT 变换与卷积
  - DFT 变换与圆周卷积
  - DFT 变换与线性卷积
- 5 离散余弦变换
- 6 Haar 变换
- 7 小结

# Outline

- 1 介绍
- 2 有限长离散正交变换
- 3 DFT 变换
  - 定义
  - DFT 变换与 DTFT 变换的关系
  - 有限长序列的分类
  - IDFT 变换
  - DFT 变换的定理
  - DFT 变换的性质
- 4 DFT 变换与卷积
  - DFT 变换与圆周卷积
  - DFT 变换与线性卷积
- 5 离散余弦变换
- 6 Haar 变换
- 7 小结

# 离散傅里叶变换

- DFT 变换定义

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

- 旋转因子:

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \Rightarrow X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}$$

- 正交基:

$$\psi[n, k] = W_N^{-kn}$$

- $N$  为 DFT 变换的点数

- IDFT 变换定义

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] W_N^{-nk}$$

## 例子：计算序列的 DFT 变换

计算序列  $x[n] = \{1, 0, 2, 1\}$  的 DFT 变换。

$$X_4[0] = x[0]e^{-j2\pi 0 \cdot 0/4} + x[1]e^{-j2\pi 0 \cdot 1/4} + x[2]e^{-j2\pi 0 \cdot 2/4} + x[3]e^{-j2\pi 0 \cdot 3/4} = 1 + 2 + 1 =$$

$$X_4[1] = x[0]e^{-j2\pi 1 \cdot 0/4} + x[1]e^{-j2\pi 1 \cdot 1/4} + x[2]e^{-j2\pi 1 \cdot 2/4} + x[3]e^{-j2\pi 1 \cdot 3/4} = 1 - 2 + j =$$

$$X_4[2] = x[0]e^{-j2\pi 2 \cdot 0/4} + x[1]e^{-j2\pi 2 \cdot 1/4} + x[2]e^{-j2\pi 2 \cdot 2/4} + x[3]e^{-j2\pi 2 \cdot 3/4} = 1 + 2 - 1 =$$

$$X_4[3] = x[0]e^{-j2\pi 3 \cdot 0/4} + x[1]e^{-j2\pi 3 \cdot 1/4} + x[2]e^{-j2\pi 3 \cdot 2/4} + x[3]e^{-j2\pi 3 \cdot 3/4} = 1 - 2 - j =$$

# Outline

- 1 介绍
- 2 有限长离散正交变换
- 3 DFT 变换
  - 定义
  - DFT 变换与 DTFT 变换的关系
  - 有限长序列的分类
  - IDFT 变换
  - DFT 变换的定理
  - DFT 变换的性质
- 4 DFT 变换与卷积
  - DFT 变换与圆周卷积
  - DFT 变换与线性卷积
- 5 离散余弦变换
- 6 Haar 变换
- 7 小结

# DTFT $\Rightarrow$ DFT

- DTFT 变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- 令  $\omega = k(2\pi/N)$ , 考虑有限长序列  $x[n], n = 0, \dots, N-1$ ,

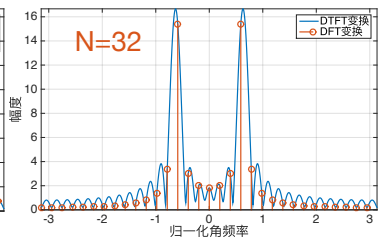
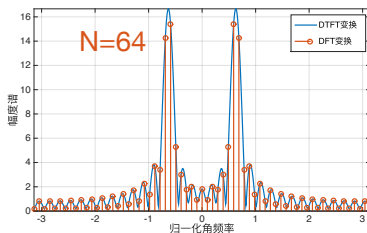
$$X_N[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=k(2\pi/N)} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

- DFT 变换为 DTFT 变换的等间隔采样 ( $-\pi$  到  $\pi$  之间), 采样周期为  $\Delta\omega = 2\pi/N$ 。



# 例子：DFT 变换

$$x[n] = \cos(2\pi 0.1n), \quad n \in \{0, \dots, 31\}$$



# Question & Discussion



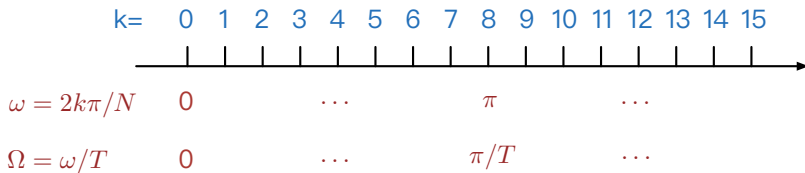
DTFT  $\Rightarrow$  DFT: 频域上等间隔采样, 采样间隔为  $\Delta\omega = 2\pi/N$ ; 那么,

- DFT 变换的序号  $k$  有什么物理含义?
- 如果  $\Delta\omega$  减小, 会怎样? (Matlab)
- 我们如何来应用这个性质?
- 反过来看, DFT 变换  $\Rightarrow$  DTFT 变换是什么关系?

# DFT 变换的序号变量 $k$

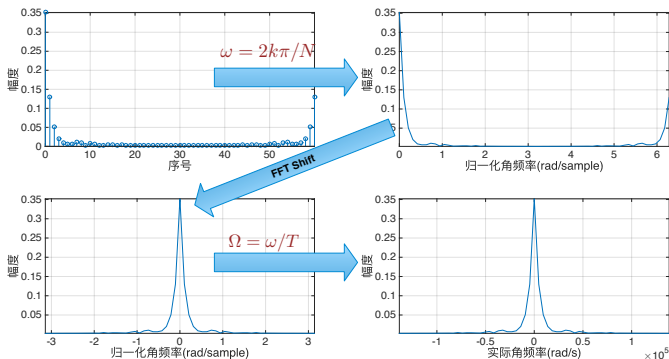
$$X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=k(2\pi/N)} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

$N=16$



# 例子：理解 DFT 变换的序号变量

一段语音信号  $x[n]$  的频谱分析：



# 频率抽样间隔 $\Delta\omega$

- 频率抽样间隔：

$$\Delta\omega = 2\pi/N$$

- 增加 DFT 点数  $N$ ，减小抽样间隔
- 减少 DFT 点数  $N$ ，增大抽样间隔

# 利用 DFT 变换近似 DTFT 变换

- 序列  $x[n]$  长度为  $M$ ，其 DTFT 变换为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} x[n]e^{-j\omega n}$$

- 序列  $x[n]$  的 DTFT 变换在  $\omega = \omega_k = k \cdot \frac{2\pi}{N}$  处的值

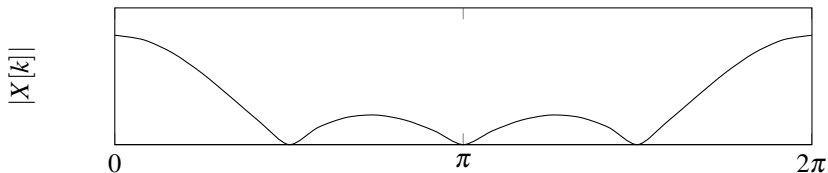
$$\begin{aligned} X(e^{j\omega_k}) &= \sum_{n=0}^{M-1} x[n]e^{-j\omega_k n} = \sum_{n=0}^{M-1} x[n]e^{-jkn \cdot \frac{2\pi}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} + \sum_{n=M}^{N-1} 0 \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} y[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = Y_N[k] \end{aligned}$$

- 定义长度为  $N$  的新序列  $y[n]$ ,

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & M < n < N \end{cases}$$

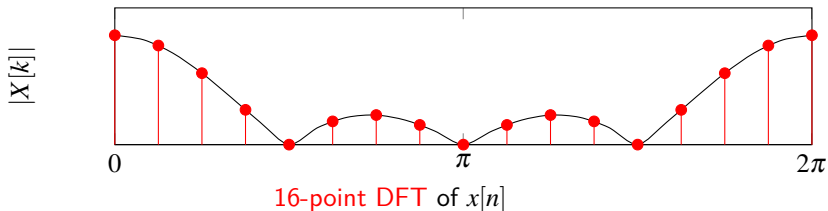
# 利用 DFT 变换近似 DTFT 变换

$$x[n] = u[n] - u[n-4] \quad (\text{step})$$



# 利用 DFT 变换近似 DTFT 变换

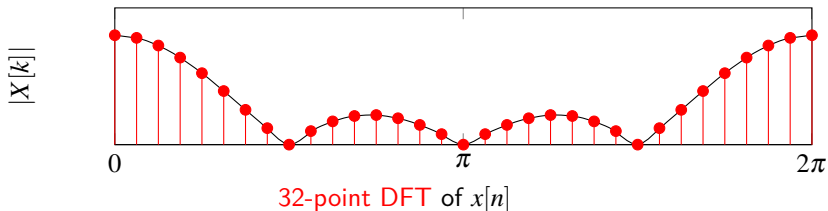
$$x[n] = u[n] - u[n-4] \quad (\text{step})$$





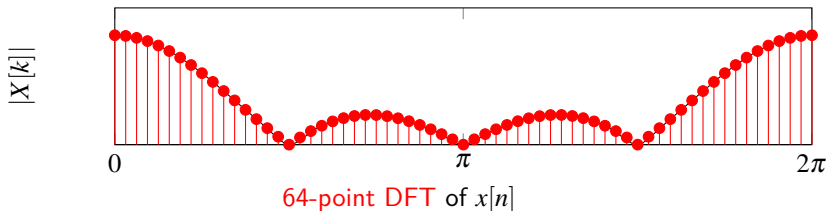
# 利用 DFT 变换近似 DTFT 变换

$$x[n] = u[n] - u[n-4] \quad (\text{step})$$



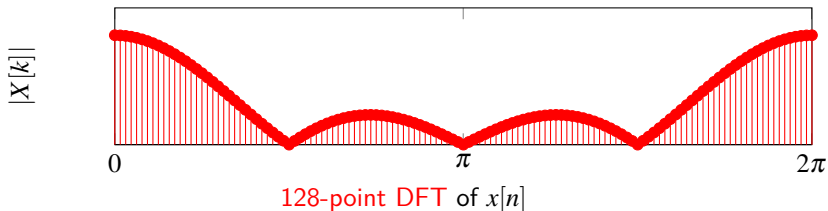
# 利用 DFT 变换近似 DTFT 变换

$$x[n] = u[n] - u[n-4] \quad (\text{step})$$



# 利用 DFT 变换近似 DTFT 变换

$$x[n] = u[n] - u[n-4] \quad (\text{step})$$



# DFT $\Rightarrow$ DTFT

$$\begin{aligned}X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] W_N^{-kn} \right) e^{-j\omega n} \\&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega - 2\pi k/N)n} \\&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] \cdot \frac{\sin N \frac{\omega - 2\pi k/N}{2}}{\sin \frac{\omega - 2\pi k/N}{2}} e^{-j \frac{N-1}{2} (\omega - 2\pi k/N)} \\&= \sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] \Phi(\omega - 2\pi k/N)\end{aligned}$$

# 利用插值由 DFT 得到 DTFT

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \Phi(\omega - 2\pi k/N)$$

- $\Phi$  为插值函数

$$\Phi(2\pi l/N) = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ 0 & 1 \leq l \leq N-1 \end{cases}$$

- 频率样本点  $\omega = k \cdot 2\pi/N$ :

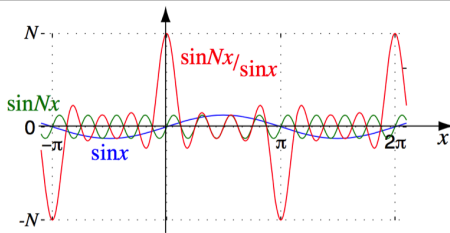
$$X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} = X[k]$$

因此，DTFT 变换  $X(e^{j\omega})$  可以通过 DFT 变换  $X[k]$  插值来得到。

# DFT 插值得到 DTFT

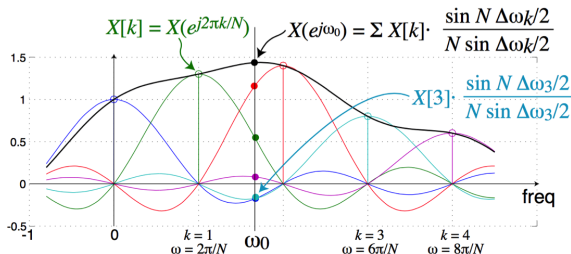
## Periodic sinc

$$\frac{\sin Nx}{\sin x}$$

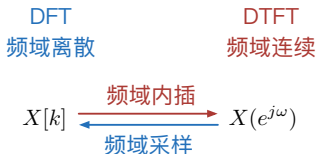


DFT → DTFT  
= **interpolation**  
by periodic  
sinc

$$X[k] \rightarrow X(e^{j\omega})$$



# DFT 与 DTFT 的关系



# Outline

- 1 介绍
- 2 有限长离散正交变换
- 3 DFT 变换
  - 定义
  - DFT 变换与 DTFT 变换的关系
  - 有限长序列的分类
  - IDFT 变换
  - DFT 变换的定理
  - DFT 变换的性质
- 4 DFT 变换与卷积
  - DFT 变换与圆周卷积
  - DFT 变换与线性卷积
- 5 离散余弦变换
- 6 Haar 变换
- 7 小结



# 对称关系

长度为  $N$  的序列  $x[n]$ , 有两种对称的分类方法:

- 基于共轭对称的分类:

- 圆周共轭对称序列

$$x[n] = x^*[\langle -n \rangle_N]$$

- 圆周共轭反对称序列

$$x[n] = -x^*[\langle -n \rangle_N]$$

- 基于几何对称的分类:

- 对称序列

$$x[n] = x[N - 1 - n]$$

- 反对称序列

$$x[n] = -x[N - 1 - n]$$

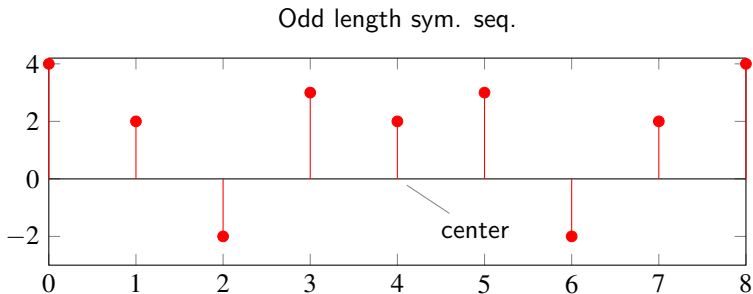


## 例子：判断序列的对称性

- 判断序列  $x[n]$  的对称性：

- ①  $x[n] = \{1, -3.5 + j4.5, 4, -3.5 - j4.5\}$ ;
- ②  $x[n] = \{j4, 1.5 - j1.5, -j2, -1.5 - j1.5\}$ ;
- ③  $x[n] = \{-1, 1.2, 5, 1.2, -1\}$ ;
- ④  $x[n] = \{-1, 1.2, 5, -1.2, 1\}$ ;
- ⑤  $x[n] = \{-1, 1.2, 0, -1.2, 1\}$ ;
- ⑥  $x[n] = \{-1, 1.2, -1.2, 1\}$ ;
- ⑦  $x[n] = \{-1, 1.2, 1.2, -1\}$ ;
- ⑧  $x[n] = \{-1, 1.2, 5, 1.2, -1\}$ ;

# 奇长度对称序列及其 DFT 变换



$$x[0] = x[8], x[1] = x[7], x[2] = x[6], x[3] = x[5], x[4]$$

# 奇长度对称序列及其 DFT 变换

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} \\
 &= x\left[\frac{N-1}{2}\right] e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} + \sum_{n=0}^{(N-1)/2-1} x[n] (e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(N-1-n)}) \\
 &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left\{ x\left[\frac{N-1}{2}\right] + \sum_{n=0}^{(N-1)/2-1} x[n] (e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-n)} + e^{-j\omega(\frac{N-1}{2}-n)}) \right\} \\
 &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left( x\left[\frac{N-1}{2}\right] + 2 \sum_{n=0}^{(N-1)/2-1} x[n] \cos(\omega(\frac{N-1}{2} - n)) \right) \\
 &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left( x\left[\frac{N-1}{2}\right] + 2 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} x\left[\frac{N-1}{2} - n\right] \cos(\omega n) \right)
 \end{aligned}$$

# 奇长度对称序列及其 DFT 变换

- 奇长度对称序列的 DTFT

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left( x\left[\frac{N-1}{2}\right] + 2 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} x\left[\frac{N-1}{2} - n\right] \cos(\omega n) \right)$$

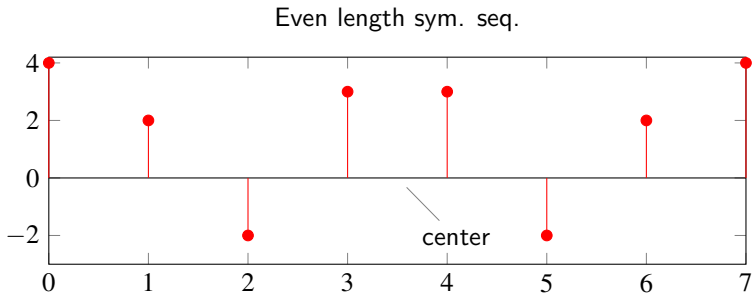
相位响应关于角频率  $\omega$  是线性的：

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \beta, \quad \beta \in \{0, \pi\}$$

- 奇长度对称序列的 DFT ( $\omega = 2\pi k/N$ )

$$X[k] = e^{-j\frac{\pi k(N-1)}{N}} \left( x\left[\frac{N-1}{2}\right] + 2 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} x\left[\frac{N-1}{2} - n\right] \cos(2\pi kn/N) \right)$$

# 偶长度对称序列及其 DFT 变换



$$x[0] = x[7], x[1] = x[6], x[2] = x[5], x[3] = x[4]$$

# 偶长度对称序列及其 DFT 变换

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] (e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(N-1-n)}) \\ &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left\{ \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] (e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-n)} + e^{-j\omega(\frac{N-1}{2}-n)}) \right\} \\ &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left( 2 \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] \cos(\omega(\frac{N-1}{2} - n)) \right) \\ &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left( 2 \sum_{n=1}^{N/2} x[\frac{N}{2} - n] \cos(\omega(n - \frac{1}{2})) \right) \end{aligned}$$

# 偶长度对称序列及其 DFT 变换

## 偶长度对称序列的 DTFT 变换

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left( 2 \sum_{n=1}^{N/2} x\left[\frac{N}{2} - n\right] \cos\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right)$$

## 线性相位响应

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \beta, \quad \beta \in \{0, \pi\}$$

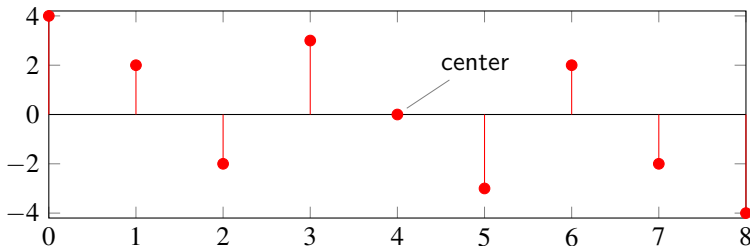
## 偶长度对称序列的 DFT 变换 ( $\omega = 2\pi k/N$ )

$$X[k] = e^{-j\frac{\pi k(N-1)}{N}} \left( 2 \sum_{n=1}^{N/2} x\left[\frac{N}{2} - n\right] \cos\left(\pi k(2n - 1)/N\right) \right)$$



# 奇长度反对称序列及其 DFT 变换

Odd length antisym. seq.



$$x[0] = -x[8], x[1] = -x[7], x[2] = -x[6], x[3] = -x[5], x[4] = 0$$

# 奇长度反对称序列及其 DFT 变换

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{(N-1)/2-1} x[n](e^{-j\omega n} - e^{-j\omega(N-1-n)}) \\ &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left\{ \sum_{n=0}^{(N-1)/2-1} x[n](e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-n)} - e^{-j\omega(\frac{N-1}{2}-n)}) \right\} \\ &= je^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left( 2 \sum_{n=0}^{(N-1)/2-1} x[n] \sin(\omega(\frac{N-1}{2} - n)) \right) \\ &= je^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left( 2 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} x[\frac{N-1}{2} - n] \sin(\omega n) \right) \end{aligned}$$

# 奇长度反对称序列及其 DFT 变换

奇长度反对称序列的 **DTFT** 变换

$$X(e^{j\omega}) = je^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left( 2 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} x[\frac{N-1}{2} - n] \sin(\omega n) \right)$$

线性相位响应

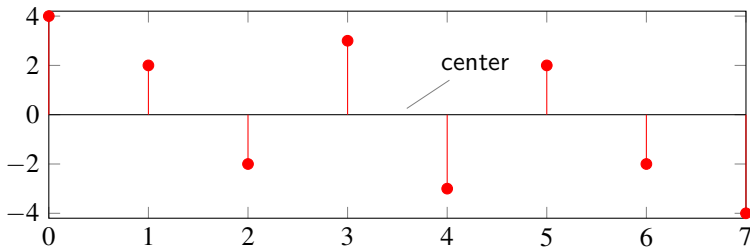
$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2} + \beta, \quad \beta \in \{0, \pi\}$$

奇长度反对称序列的 **DFT** 变换 ( $\omega = 2\pi k/N$ )

$$X[k] = je^{-j\frac{\pi k(N-1)}{N}} \left( 2 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} x[\frac{N-1}{2} - n] \sin(2\pi kn/N) \right)$$

# 偶长度反对称序列及其 DFT 变换

Even length antisym. seq.



$$x[0] = -x[7], x[1] = -x[6], x[2] = -x[5], x[3] = -x[4]$$

# 偶长度反对称序列及其 DFT 变换

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] (e^{-j\omega n} - e^{-j\omega(N-1-n)}) \\ &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left\{ \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] (e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-n)} - e^{-j\omega(\frac{N-1}{2}-n)}) \right\} \\ &= je^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left( 2 \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] \sin(\omega(\frac{N-1}{2} - n)) \right) \\ &= je^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left( 2 \sum_{n=1}^{N/2} x[\frac{N}{2} - n] \sin(\omega(n - \frac{1}{2})) \right) \end{aligned}$$

# 偶长度反对称序列及其 DFT 变换

偶长度反对称序列的 **DTFT** 变换

$$X(e^{j\omega}) = je^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left( 2 \sum_{n=1}^{N/2} x[\frac{N}{2} - n] \sin(\omega(n - \frac{1}{2})) \right)$$

线性相位响应

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \beta, \quad \beta \in \{0, \pi\}$$

偶长度反对称序列的 **DFT** 变换 ( $\omega = 2\pi k/N$ )

$$X[k] = je^{-j\frac{\pi k(N-1)}{N}} \left( 2 \sum_{n=1}^{N/2} x[\frac{N}{2} - n] \sin(\pi k(2n - 1)/N) \right)$$



# 几何对称序列的傅里叶变换

- 线性相位

# Outline

- 1 介绍
- 2 有限长离散正交变换
- 3 DFT 变换
  - 定义
  - DFT 变换与 DTFT 变换的关系
  - 有限长序列的分类
  - IDFT 变换
  - DFT 变换的定理
  - DFT 变换的性质
- 4 DFT 变换与卷积
  - DFT 变换与圆周卷积
  - DFT 变换与线性卷积
- 5 离散余弦变换
- 6 Haar 变换
- 7 小结



# 逆离散时间傅里叶变换 (IDTFT)

- IDFT:

$$\text{IDFT: } x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}$$

- 证明:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{N} \sum_k \left( \sum_l x[l] W_N^{kl} \right) W_N^{-nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x[l] \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(l-n)} \\ &= x[n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0 \text{ if } n \neq l; \\ &= N \text{ if } n = l \end{aligned}$$

# DFT 的矩阵形式

- 将 DFT 变换  $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}$  可以写成矩阵相乘形式:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_N} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}_N \cdot \mathbf{x}$$

# IDFT 变换矩阵

- 如果  $\mathbf{X} = \mathbf{D}_N \cdot \mathbf{x}$ , 那么  $\mathbf{x} = \mathbf{D}_N^{-1} \cdot \mathbf{X}$
- IDFT 矩阵

$$\mathbf{D}_N^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \dots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \dots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \dots & W_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

- i.e.  $\mathbf{D}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{D}_N^H$

# 矩阵形式的 DFT 变换

- 分析式：

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}_N \mathbf{x}$$

- 综合式：

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}_N^H \mathbf{X}$$

# Outline

- 1 介绍
- 2 有限长离散正交变换
- 3 DFT 变换
  - 定义
  - DFT 变换与 DTFT 变换的关系
  - 有限长序列的分类
  - IDFT 变换
  - DFT 变换的定理
  - DFT 变换的性质
- 4 DFT 变换与卷积
  - DFT 变换与圆周卷积
  - DFT 变换与线性卷积
- 5 离散余弦变换
- 6 Haar 变换
- 7 小结

# 线性定理

$$x[n] \longleftrightarrow X[k]$$

$$y[n] \longleftrightarrow Y[k]$$

$$\begin{aligned}\alpha x[n] + \beta y[n] &\longleftrightarrow \sum_{n=0}^{N-1} (\alpha x[n] + \beta y[n]) W_N^{kn} \\ &\longleftrightarrow \alpha \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} + \beta \sum_{n=0}^{N-1} y[n] W_N^{kn} \\ &\longleftrightarrow \alpha X[k] + \beta Y[k]\end{aligned}$$

# 圆周平移定理

$$\begin{aligned}x[n] &\longleftrightarrow X[k] \\x[\langle n - n_0 \rangle_N] &\longleftrightarrow \sum_{n=0}^{N-1} x[\langle n - n_0 \rangle_N] W_N^{kn} \\&\longleftrightarrow \sum_{n=0}^{N-1} x[\langle n - n_0 \rangle_N] W_N^{k\langle n - n_0 \rangle_N} W_N^{k(n - \langle n - n_0 \rangle_N)} \\&\longleftrightarrow W_N^{kn_0} \sum_{n=0}^{N-1} x[\langle n - n_0 \rangle_N] W_N^{k\langle n - n_0 \rangle_N} = W_N^{kn_0} X[k]\end{aligned}$$

# 圆周卷积定理

$$x[n] \longleftrightarrow X[k], h[n] \longleftrightarrow H[k]$$

$$\begin{aligned} y[n] = x[n] \circledast h[n] &\leftrightarrow \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{m=0}^{N-1} x[m] h[\langle n-m \rangle_N] \right) W_N^{kn} \\ &\leftrightarrow \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \left( \sum_{n=0}^{N-1} h[\langle n-m \rangle_N] W_N^{kn} \right) \\ &\leftrightarrow \left( \sum_{m=0}^{N-1} x[m] W_N^{km} \right) H[k] \\ &\leftrightarrow X[k] H[k] \end{aligned}$$



# DFT 变换定理

- Linear
- Circular time shift
- Circular frequency shift
- Duality
- Circular convolution
- Modulation
- Parseval

$$\alpha g[n] + \beta h[n] \leftrightarrow \alpha G[k] + \beta H[k]$$

$$g[\langle n - n_0 \rangle_N] \leftrightarrow W_N^{kn_0} G[k]$$

$$W_N^{-k_0 n} g[n] \leftrightarrow G[\langle k - k_0 \rangle_N]$$

$$G[n] \leftrightarrow N g[\langle -k \rangle_N]$$

$$g[n] \otimes h[n] \leftrightarrow G[k] H[k]$$

$$g[n] h[n] \leftrightarrow \frac{1}{N} G[k] \otimes H[k]$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} |g[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |G[k]|^2$$

# Outline

- 1 介绍
- 2 有限长离散正交变换
- 3 DFT 变换
  - 定义
  - DFT 变换与 DTFT 变换的关系
  - 有限长序列的分类
  - IDFT 变换
  - DFT 变换的定理
  - DFT 变换的性质
- 4 DFT 变换与卷积
  - DFT 变换与圆周卷积
  - DFT 变换与线性卷积
- 5 离散余弦变换
- 6 Haar 变换
- 7 小结

# DFT 变换一般都是复数的

- $x[n], 0 \leq n \leq N-1$  的 DFT 变换,

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

- $X[k]$  一般是复数

$$X[k] = X_{re}[k] + jX_{im}[k]$$

- 满足等式:

$$X_{re}[k] = \frac{1}{2}(X[k] + X^*[k])$$

$$X_{im}[k] = \frac{1}{2j}(X[k] - X^*[k])$$

# DFT 的性质：共轭

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*[\langle -k \rangle_N].$$

**Proof:**

$$X^*[k] = \left( \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \right)^* = \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n] W_N^{-kn}$$

replace  $k \rightarrow \langle -k \rangle_N$

$$X^*[\langle -k \rangle_N] = \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n] W_N^{-\langle -k \rangle_N n}$$

the fact is  $W_N^{\langle -k \rangle_N n} = W_N^{-kn}$ ,

$$X^*[\langle -k \rangle_N] = \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n] W_N^{kn}$$

# DFT 性质：圆周翻转共轭

$$x^*[\langle -n \rangle_N] \longleftrightarrow X^*[k].$$

**Proof:** the similar proof as DFT of  $x^*[n]$ , just exchange  $x$  and  $X$ ,  $k$  with  $n$ .

# DFT 的性质：共轭对称部分和共轭反对称部分

$$\begin{aligned}x_{cs}[n] &\longleftrightarrow X_{re}[k] \\x_{ca}[n] &\longleftrightarrow jX_{im}[k].\end{aligned}$$

**Proof:**

$$x^*[\langle -n \rangle_N] \longleftrightarrow X^*[k]$$

linearity of DFT:

$$x_{cs}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[\langle -n \rangle_N]) \longleftrightarrow \frac{1}{2}(X[k] + X^*[k]) = X_{re}[k]$$

and

$$x_{ca}[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[\langle -n \rangle_N]) \longleftrightarrow \frac{1}{2}(X[k] - X^*[k]) = jX_{im}[k]$$

# DFT 的性质：实部和虚部

$$\begin{aligned}x_{re}[n] &\longleftrightarrow X_{cs}[k] \\ jx_{im}[n] &\longleftrightarrow X_{ca}[k].\end{aligned}$$

**Proof:**

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*[\langle -k \rangle_N]$$

linearity of DFT:

$$x_{re}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[n]) \longleftrightarrow \frac{1}{2}(X[k] + X^*[\langle -k \rangle_N]) = X_{cs}[k]$$

and

$$jx_{im}[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[n]) \longleftrightarrow \frac{1}{2}(X[k] - X^*[\langle -k \rangle_N]) = X_{ca}[k]$$

# 用单个 N 点 DFT 计算两个实序列的 N 点 DFT

- 计算两个长度为 N 的实数序列  $x[n]$  和  $h[n]$  的 DFT 变换
- 两个序列构造一个复数序列  $z[n]$ ,

$$z[n] = x[n] + jh[n]$$

- 根据 DFT 变换性质:

$$z_{re}[n] = x[n] \leftrightarrow \frac{1}{2}(Z[k] + Z^*[\langle -k \rangle_N]) = Z_{cs}[k]$$

$$z_{im}[n] = h[n] \leftrightarrow \frac{1}{2j}(Z[k] - Z^*[\langle -k \rangle_N]) = Z_{ca}[k]$$



# 用单个 $N$ 点 DFT 一个实序列的 $2N$ 点 DFT

- 计算长度为  $2N$  的实序列  $v[n]$  的 DFT 变换
- 构造复数序列  $z[n]$

$$z[n] = \underbrace{v[2n]}_{x[n]} + j \underbrace{v[2n+1]}_{h[n]} \implies X[k], H[k]$$

- 计算原始  $2N$  点序列  $v[n]$  的 DFT

$$\begin{aligned} V[k] &= \sum_{n=0}^{2N-1} v[n] W_{2N}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} v[2n] W_{2N}^{2nk} + \sum_{n=0}^{N-1} v[2n+1] W_{2N}^{(2n+1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{N-1} h[n] W_N^{nk} W_{2N}^k \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}}_{X[k]} + W_{2N}^k \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} h[n] W_N^{nk}}_{H[k]} \end{aligned}$$

# 实序列 DFT 变换的性质

$$x[n] \in \mathbb{R}, 0 \leq n \leq N-1$$

**Equalities:**

$$x_{ev}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[\langle -n \rangle_N])$$

$$x_{od}[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[\langle -n \rangle_N])$$

# 实序列 DFT 变换性质：圆周共轭对称

$$X[k] = X^*[\langle -k \rangle_N]$$

**Proof:**

$$x[n] = x^*[n] \implies X[k] = X^*[\langle -k \rangle_N]$$

# 实序列的 DFT 性质：偶对称部分和奇对称部分

$$\begin{aligned}x_{ev}[n] &\longleftrightarrow X_{re}[k] \\x_{od}[n] &\longleftrightarrow jX_{im}[k].\end{aligned}$$

**Proof:**

$$\begin{aligned}x_{ev}[n] &= x_{cs}^*[n] \longleftrightarrow X_{re}[k] \\x_{od}[n] &= x_{ca}^*[n] \longleftrightarrow jX_{im}[k]\end{aligned}$$



# Outline

- 1 介绍
- 2 有限长离散正交变换
- 3 DFT 变换
  - 定义
  - DFT 变换与 DTFT 变换的关系
  - 有限长序列的分类
  - IDFT 变换
  - DFT 变换的定理
  - DFT 变换的性质
- 4 DFT 变换与卷积
  - DFT 变换与圆周卷积
  - DFT 变换与线性卷积
- 5 离散余弦变换
- 6 Haar 变换
- 7 小结



# Outline

- 1 介绍
- 2 有限长离散正交变换
- 3 DFT 变换
  - 定义
  - DFT 变换与 DTFT 变换的关系
  - 有限长序列的分类
  - IDFT 变换
  - DFT 变换的定理
  - DFT 变换的性质
- 4 DFT 变换与卷积
  - DFT 变换与圆周卷积
  - DFT 变换与线性卷积
- 5 离散余弦变换
- 6 Haar 变换
- 7 小结

# 圆周卷积

- 线性卷积：

$$y_L[n] = x[n] \otimes h[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[n-m]$$

- 圆周卷积：

$$y_C[n] = x[n] \textcircled{\otimes} h[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[\langle n-m \rangle_N]$$

# 圆周卷积的矩阵形式

$$y_C[n] = x[n] \textcircled{*} h[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] h[\langle n-m \rangle_N]$$

$$\begin{bmatrix} y_C[0] \\ y_C[1] \\ y_C[2] \\ \vdots \\ y_C[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & h[N-1] & h[N-2] & \dots & h[1] \\ h[1] & h[0] & h[N-1] & \dots & h[2] \\ h[2] & h[1] & h[0] & \dots & h[3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[N-1] & h[N-2] & h[N-3] & \dots & h[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$



## 例子：计算圆周卷积

- 计算两个长度为 4 的序列  $x[n]$  和  $h[n]$  的圆周卷积

$$x[n] = \{1 \ 2 \ 0 \ 1\} \quad h[n] = \{2 \ 2 \ 1 \ 1\}$$

- 计算过程：

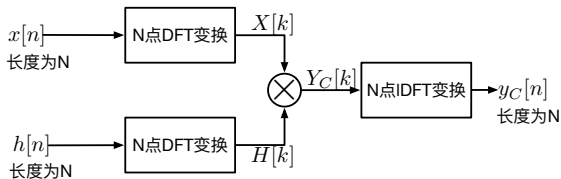
$$\begin{aligned} y_C[0] &= x[0]h[0] + x[1]h[\langle -1 \rangle_4] + x[2]h[\langle -2 \rangle_4] + x[3]h[\langle -3 \rangle_4] \\ &= x[0]h[0] + x[1]h[3] + x[2]h[2] + x[3]h[1] \\ &= 1 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 2 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_C[1] &= x[0]h[1] + x[1]h[0] + x[2]h[\langle -1 \rangle_4] + x[3]h[\langle -2 \rangle_4] \\ &= x[0]h[1] + x[1]h[0] + x[2]h[3] + x[3]h[2] \\ &= 1 \times 2 + 2 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 7 \end{aligned}$$

$$y_C[2] = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 6$$

$$y_C[3] = 1 \times 1 + 2 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 2 = 5$$

# DFT 变换计算圆周卷积



# 例子：利用 DFT 变换计算圆周卷积

- 计算两个长度为 4 的序列  $x[n]$  和  $h[n]$  的圆周卷积

$$x[n] = \{1 \ 2 \ 0 \ 1\} \quad h[n] = \{2 \ 2 \ 1 \ 1\}$$

- 变换矩阵  $D_4$ :

$$\mathbf{D}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

- 两个序列的 DFT 变换:

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}_4 \mathbf{x} = [4, 1-j, -2, 1+j]^T$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{D}_4 \mathbf{h} = [6, 1-j, 0, 1+j]^T$$

- 圆周卷积序列的卷积结果:

$$\mathbf{Y}_C = \mathbf{X}\mathbf{H} = [24, -j2, 0, j2]^T \Rightarrow \mathbf{y}_C = \frac{1}{4}\mathbf{D}_4^* \mathbf{Y}_C = [6, 7, 6, 5]^T$$

# Outline

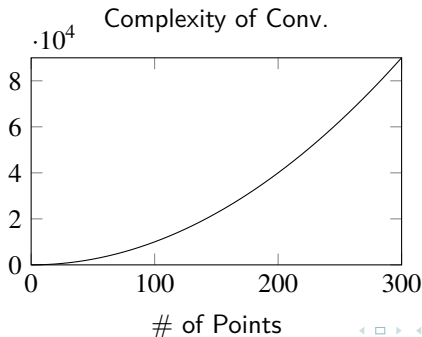
- 1 介绍
- 2 有限长离散正交变换
- 3 DFT 变换
  - 定义
  - DFT 变换与 DTFT 变换的关系
  - 有限长序列的分类
  - IDFT 变换
  - DFT 变换的定理
  - DFT 变换的性质
- 4 DFT 变换与卷积
  - DFT 变换与圆周卷积
  - DFT 变换与线性卷积
- 5 离散余弦变换
- 6 Haar 变换
- 7 小结

# 为什么要用 DFT 变换来实现线性卷积？

- 长度为  $N$  和长度为  $M$  的两个序列的线性卷积 ( $L = N + M - 1$ ):

$$y_L[n] = \sum_{m=0}^L x[m]h[n-m]$$

- 复杂度分析: ( $L$  次乘法 +  $L$  次加法)  $\times L \Rightarrow O(L^2)$

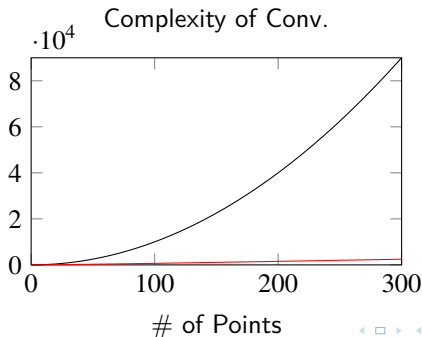


# 为什么要用 DFT 变换来实现线性卷积？

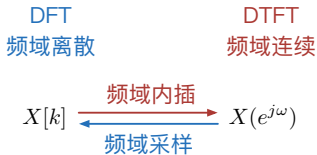
- 长度为  $N$  和长度为  $M$  的两个序列的线性卷积 ( $L = N + M - 1$ ):

$$y_L[n] = \sum_{m=0}^L x[m]h[n-m]$$

- 复杂度分析: ( $L$  次乘法 +  $L$  次加法)  $\times L \Rightarrow O(L^2)$
- DFT 变换可以通过快速算法 FFT 来实现, 复杂度为  $O(L \log L)$

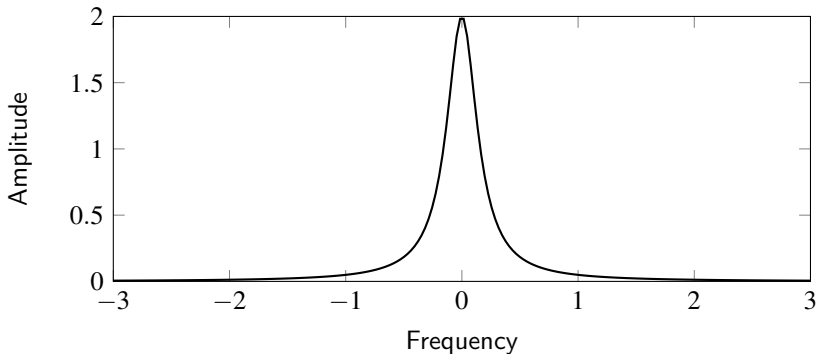


# DFT 变换与 DTFT 变换



# 频域离散

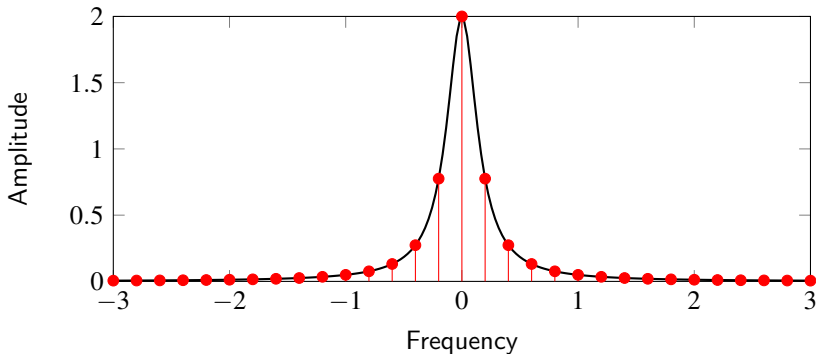
- 信号的频域离散化  $X_a(e^{j\omega}) \rightarrow X[k] = X_a(e^{jk\omega_s})$ ,





# 频域离散

- 信号的频域离散化  $X_a(e^{j\omega}) \rightarrow X[k] = X_a(e^{jk\omega_s})$ ,



$$X[k] = X_a(e^{jk\omega_s}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(e^{jk\omega_s}) \delta(\omega - \omega_s k)$$

# 序列的 DTFT 及其采样

- 序列  $\{x[n]\}$  的 DTFT 变换:

$$X_a(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- 以  $\omega_s$  等间隔抽样  $X_a(e^{j\omega})$

$$X[k] = X_p(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(e^{j\omega_s k})\delta(\omega - \omega_s k)$$

# What happens in time domain?

$$\tilde{x}[n] = IDTFT\{X_p(e^{j\omega})\}$$

# What happens in time domain?

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n] &= IDTFT\{X_p(e^{j\omega})\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(e^{j\omega_s k}) \delta(\omega - \omega_s k) \right) e^{j\omega n} d\omega\end{aligned}$$

# What happens in time domain?

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n] &= IDTFT\{X_p(e^{j\omega})\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(e^{j\omega_s k}) \delta(\omega - \omega_s k) \right) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(e^{j\omega_s k}) \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_s k) e^{j\omega n} d\omega\end{aligned}$$

# What happens in time domain?

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n] &= IDTFT\{X_p(e^{j\omega})\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(e^{j\omega_s k}) \delta(\omega - \omega_s k) \right) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(e^{j\omega_s k}) \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_s k) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] e^{-j\omega_s k l} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_s k) e^{j\omega n} d\omega\end{aligned}$$

# What happens in time domain?

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}[n] &= IDTFT\{X_p(e^{j\omega})\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(e^{j\omega_s k}) \delta(\omega - \omega_s k) \right) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(e^{j\omega_s k}) \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_s k) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] e^{-j\omega_s k l} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_s k) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] e^{-j\omega_s k l} e^{j\omega_s k n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_s k (n-l)}
 \end{aligned}$$

# What happens in time domain?

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}[n] &= IDTFT\{X_p(e^{j\omega})\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(e^{j\omega_s k}) \delta(\omega - \omega_s k) \right) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(e^{j\omega_s k}) \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_s k) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] e^{-j\omega_s k l} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_s k) e^{j\omega n} d\omega \quad \text{DTFT}\{1\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + 2\pi k) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] e^{-j\omega_s k l} e^{j\omega_s k n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_s k (n-l)}
 \end{aligned}$$



# What happens in time domain?

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}[n] &= IDTFT\{X_p(e^{j\omega})\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(e^{j\omega_s k}) \delta(\omega - \omega_s k) \right) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(e^{j\omega_s k}) \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_s k) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] e^{-j\omega_s k l} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_s k) e^{j\omega n} d\omega \quad \text{DTFT}\{1\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + 2\pi k) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] e^{-j\omega_s k l} e^{j\omega_s k n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_s k (n-l)} \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] \sum_k \delta(l - n + \frac{2\pi}{\omega_s} k) = \sum_k x[n - \frac{2\pi}{\omega_s} k]
 \end{aligned}$$

# What happens in time domain?

Sampling in frequency domain:

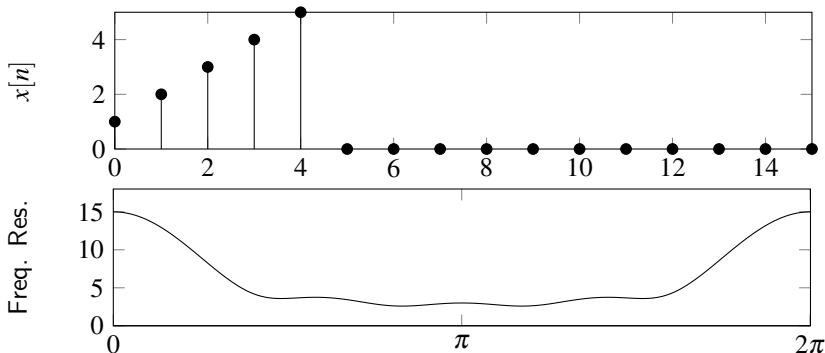
$$X_a(e^{j\omega}) \rightarrow X[k]$$

Folding in time domain:

$$\tilde{x}[n] = \sum_k x[n - \frac{2\pi}{\omega_s}k]$$

# What happens in time domain?

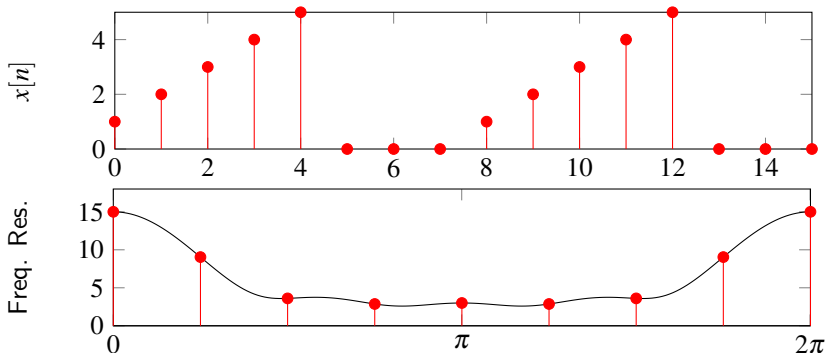
$$x[n] = n + 1 \quad n = 0, 1, \dots, 4 \quad (5 \text{ points})$$



# What happens in time domain?

$$x[n] = n + 1 \quad n = 0, 1, \dots, 4 \quad (5 \text{ points})$$

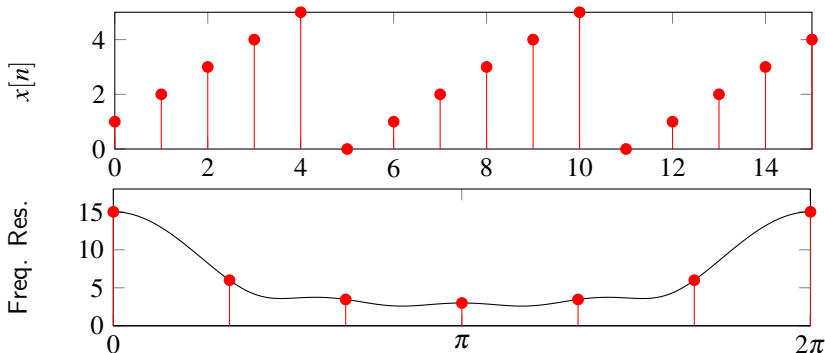
Sampling freq. with  $\omega_s = \pi/4$ , time shift  $\frac{2\pi}{\omega_s} = 8$



# What happens in time domain?

$$x[n] = n + 1 \quad n = 0, 1, \dots, 4 \quad (5 \text{ points})$$

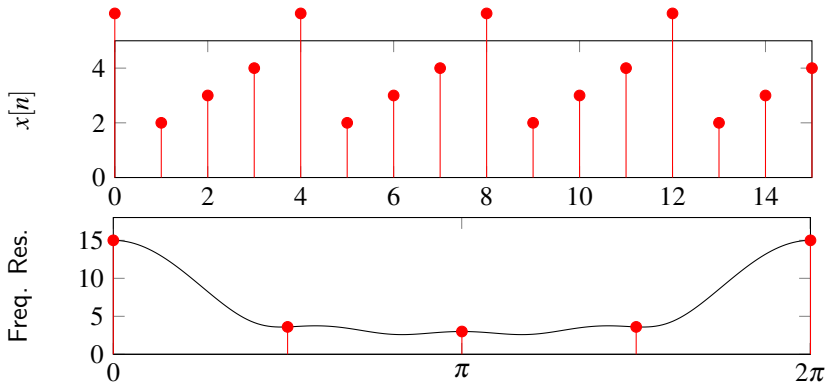
Sampling freq. with  $\omega_s = \pi/3$ , time shift  $\frac{2\pi}{\omega_s} = 6$



# What happens in time domain?

$$x[n] = n + 1 \quad n = 0, 1, \dots, 4 \quad (5 \text{ points})$$

Sampling freq. with  $\omega_s = \pi/2$ , time shift  $\frac{2\pi}{\omega_s} = 4$



# The choice of $\omega_s$

Aliasing happens in time domain when sampling in freq. domain

- Choose  $\omega_s$  to avoid aliasing:
  - signal  $x[n]$  is finite length  $N$
  - shift  $2\pi/\omega_s \geq N \Rightarrow \omega_s \leq \frac{2\pi}{N}$

- For finite length signal:

$$\tilde{x}[n] \Longleftrightarrow x[n]$$

- For infinite length signal, we should truncate the signal to a finite signal

$$\tilde{x}[n] \Longleftrightarrow x[n] \cdot w[n]$$

with window function  $w[n]$  with length  $N$ .

# 不同变换下的卷积定理

- 离散时间傅里叶变换 (DTFT) 的卷积定理

$$y_l[n] = g[n] \otimes h[n] \iff Y_l(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

如果  $g[n]$  和  $h[n]$  长度为  $N$  和  $M$ , 那么  $y_l[n]$  的长度为  $N + M - 1$ .

- 离散傅里叶变换 (DFT) 的卷积定理

$$y_c[n] = g[n] \circledast h[n] \iff Y_c[k] = G[k]H[k]$$

$y_c[n]$  的长度为  $L$ .

- $Y_c[k]$  为  $Y_l(e^{j\omega})$  的频域采样, 因此对应时域混叠

$$y_c[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l[n + rL], \quad (0 \leq n < L)$$

- 圆周卷积是线性卷积的时域周期延拓



# 利用 DFT 计算序列的线性卷积

- DFT 可以高效的计算圆周卷积: DFT→IDFT
- 如何用 DFT 计算线性卷积呢?
- 圆周卷积是线性卷积的时域周期延拓 → 存在时域混叠 → 如何消除时域混叠?
- 频域采样点数目至少和时域信号长度一样长, e.g.  $N$  点信号  $g[n]$  和  $M$  点信号  $h[n]$  的线性卷积  $y_l[n]$

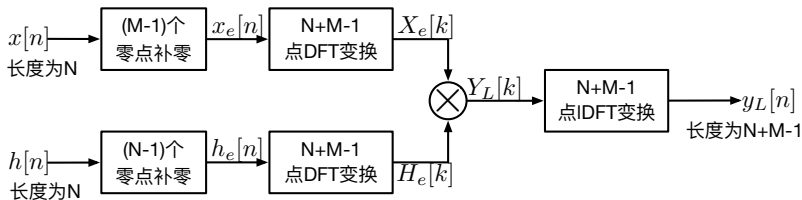
$$y_c[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l[n+rL], \quad (0 \leq n < L)$$

$$\text{Length}(y_l[n]) = N + M - 1, \quad \text{Length}(y_c[n]) = L$$

- 圆周卷积, 即 DFT 运算的长度必须满足

$$L \geq N + M - 1$$

# DFT 变换计算线性卷积



# DFT 实现有限长序列和无限长序列的线性卷积

- $M$  点有限长序列  $h[n]$  和无限长序列  $g[n]$  的线性卷积:

$$y[n] = \sum_{l=0}^{M-1} h[l]g[n-l] = h[n] \otimes g[n]$$

- 重叠相加法
- 重叠保留法

# 重叠相加法

- 首先将无限长序列  $g[n]$  分割成一组长度为  $N$  的连续有限长序列  $g_m[n]$

$$g[n] = \sum_{m=0}^{\infty} g_m[n - mN]$$

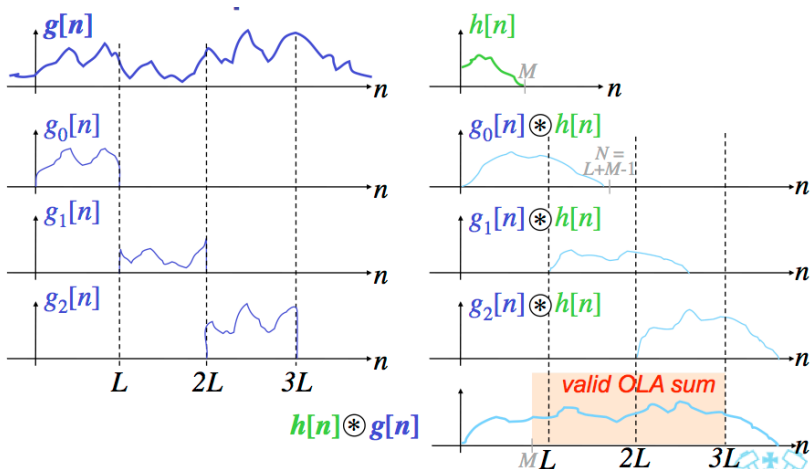
$$\text{其中 } g_m[n] = \begin{cases} g[n + mN], & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

- 卷积的线性性质, 那么

$$h[n] \otimes g[n] = \sum_m h[n] \otimes g_m[n]$$

- $h[n] \otimes g_m[n]$  可以通过  $M + N - 1$  点 DFT 来计算, 然后相加起来

# 重叠相加法



# 重叠保留法

- 首先将无限长序列  $g[n]$  分割成长度为  $N(N \geq M)$  的连续有限长序列  $g_m[n]$

$$g_m[n] = g[n + m(N - M + 1)], \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

分割是有重叠部分.

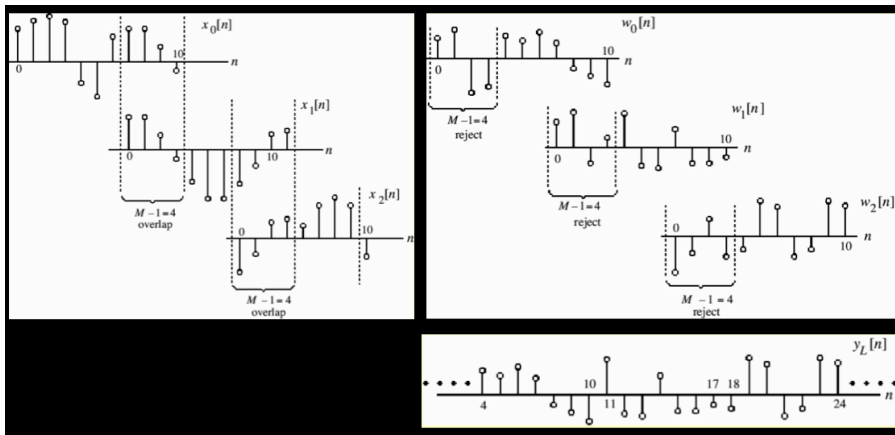
- $g_m[n]$  和  $h[n]$  的圆周卷积  $w_m[n] = h[n] \otimes g_m[n]$  与其线性卷积有重叠部分 (从第  $M - 1$  个点开始)

$$y_m[n] = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq M - 2 \\ w_m[n], & M - 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$

- 将重叠部分拼接在一起得到原序列的线性卷积

$$y_l[n + m(N - M + 1)] = y_m[n], \quad M - 1 \leq n \leq N - 1$$

# 重叠保留法



# Outline

- 1 介绍
- 2 有限长离散正交变换
- 3 DFT 变换
  - 定义
  - DFT 变换与 DTFT 变换的关系
  - 有限长序列的分类
  - IDFT 变换
  - DFT 变换的定理
  - DFT 变换的性质
- 4 DFT 变换与卷积
  - DFT 变换与圆周卷积
  - DFT 变换与线性卷积
- 5 离散余弦变换
- 6 Haar 变换
- 7 小结



# 实序列 DFT 变换的冗余性

- 实序列  $x[n]$  的 DFT 变换为  $X[k]$ :

$$x[n] \longleftrightarrow X[k]$$

- 实序列的 DFT 变换为圆周共轭对称的:

$$X[k] = X^*[\langle -k \rangle_N]$$

- 例如:  $X[k] = \{1, -3.5 + j4.5, 4, -3.5 - j4.5\}$  中, 第二和第四个点是共轭对称的。



# 实序列的有限长正交变换

- 离散余弦变换 (DCT)
- 离散 Haar 变换 (Haar 变换)

# 离散余弦变换

- DCT 变换:

$$X_{DCT}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} 2x[n] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right)$$

- IDCT 变换:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha[k] X_{DCT}[k] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \quad \alpha[k] = \begin{cases} 1/2, & k = 0 \\ 1, & 1 \leq k \leq N-1 \end{cases}$$

- 正交变换对:

$$\frac{2}{N} \alpha[k] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right) \cos\left(\frac{\pi m(2n+1)}{2N}\right) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

# 离散余弦变换与 DFT 变换的关系

- 假设  $N$  点长序列  $x[n]$  的 DCT 变换为  $X_{DCT}[k]$ , 那么定义

$$Y[k] = \begin{cases} W_{2N}^{-k/2} X_{DCT}[k], & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & k = N \\ -W_{2N}^{-k/2} X_{DCT}[2N-k], & N+1 \leq k \leq 2N-1 \end{cases}$$

- $Y[k]$  的 IDFT 变换为  $y[n]$ ,

$$y[n] = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} Y[k] W_{2N}^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq 2N-1$$

# 离散余弦变换与 DFT 变换的关系

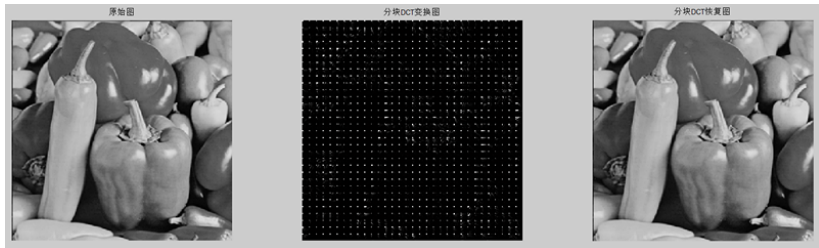
- 可以计算出：

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{DCT}[k] W_{2N}^{-(n+1/2)k} - \frac{1}{2N} \sum_{k=N+1}^{2N-1} X_{DCT}[2N-k] W_{2N}^{-(n+1/2)k} \\
 &= \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{DCT}[k] W_{2N}^{-(n+1/2)k} - \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{DCT}[k] W_{2N}^{-(n+1/2)2N-k} \\
 &= \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{DCT}[k] W_{2N}^{-(n+1/2)k} + \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{DCT}[k] W_{2N}^{(n+1/2)k} \\
 &= \frac{X_{DCT}[0]}{2N} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{DCT}[k] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}, \quad 0 \leq n \leq 2N-1\right)
 \end{aligned}$$

- 得出结论： $x[n] = y[n], 0 \leq n \leq N-1$

# DCT 变换与 JPEG 压缩

- JPEG 压缩是基于 2 维 DCT 变换的，首先将图像分成  $8 \times 8$  的小块，然后依次做 DCT 变换，保留能量较大的系数，舍弃较小的。





# Outline

- 1 介绍
- 2 有限长离散正交变换
- 3 DFT 变换
  - 定义
  - DFT 变换与 DTFT 变换的关系
  - 有限长序列的分类
  - IDFT 变换
  - DFT 变换的定理
  - DFT 变换的性质
- 4 DFT 变换与卷积
  - DFT 变换与圆周卷积
  - DFT 变换与线性卷积
- 5 离散余弦变换
- 6 Haar 变换
- 7 小结

# Haar 变换

- 连续 Haar 函数

$$h_0(t) = h_{0,0}(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$h_l(t) = h_{r,s}(t) = \begin{cases} 2^{r/2}, & \frac{s-1}{2^r} \leq t < \frac{s-0.5}{2^r} \\ -2^{r/2}, & \frac{s-0.5}{2^r} \leq t < \frac{s}{2^r} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 离散 Haar 变换矩阵是对连续 Haar 函数的离散化得到的

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- 不难证明，离散 Haar 变换也是正交变换。



# Haar 变换

- Haar 变换是小波变换的一种，而小波变换为 JPEG2000 压缩的基本原理。

JPEG 1:126



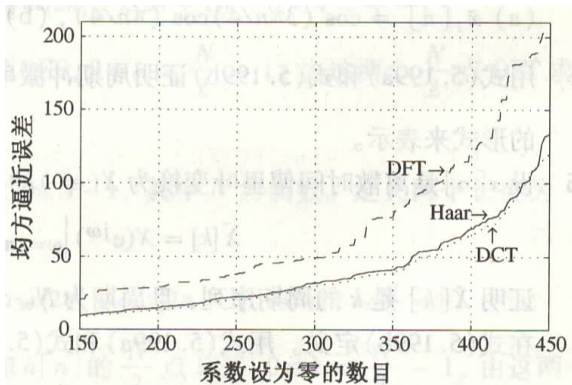
JPEG2000 1:126



# 能量压缩性质

- 能量压缩性质度量正交变换的压缩特性 ( $L$  表示有  $L$  个元素被置零):

$$\mathcal{E}(L) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n] - x^{(m)}[n]|^2$$





# Outline

- 1 介绍
- 2 有限长离散正交变换
- 3 DFT 变换
  - 定义
  - DFT 变换与 DTFT 变换的关系
  - 有限长序列的分类
  - IDFT 变换
  - DFT 变换的定理
  - DFT 变换的性质
- 4 DFT 变换与卷积
  - DFT 变换与圆周卷积
  - DFT 变换与线性卷积
- 5 离散余弦变换
- 6 Haar 变换
- 7 小结

# 小结

- 有限长正交变换
  - DFT 变换
  - DCT 变换
  - Haar 变换
- DFT 变换
  - DTFT 变换的频域采样
  - DFT 变换的性质和定理
  - DFT 变换计算圆周卷积和线性卷积